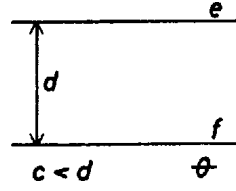
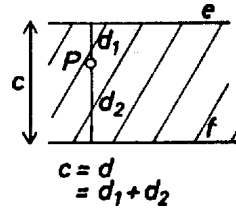


Jelöljük az előírt állandót c -vel, a két adott egyenest pedig e -vel és f -el. Két esetet különböztetünk meg.

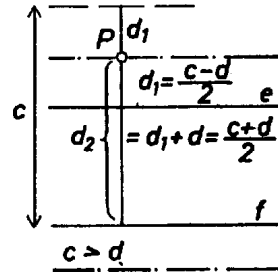
Ha e és f két egymástól d távolságra lévő párhuzamos egyenes, akkor könnyen látható, hogy a mértani hely az üres halmaz, ha $d > c$, az e és f közti végtelen sáv, ha $d = c$, illetve két, e -vel és f -fel párhuzamos egyenes, melyek távolsága e -től és f -től $\frac{c-d}{2}$ és $\frac{c+d}{2}$, ha $d < c$. Ezek a lehetőségek az 1/a, b, c ábrákon láthatók.



1/a ábra

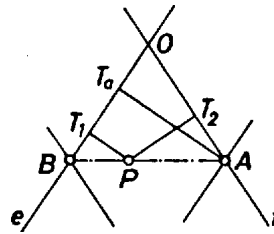


1/b ábra



1/c ábra

Ha e és f két metsző egyenes, akkor ezek a síkot négy szögtartományra osztják. Vizsgáljuk ezek egyikét. Legyen a két egyenes metszéspontja O , az e -től, illetve f -től c távolságra lévő, velük párhuzamos, a szögtartományban lévő félegyenesek kezdőpontja pedig A , illetve B (2. ábra).



2. ábra

Megmutatjuk, hogy ebben a szögtartományban a mértani hely az AB szakasz. Legyen P az AB szakasz tetszőleges pontja, T_a az A -ból e -re, T_1 és T_2 pedig a P -ből e -re és f -re bocsátott merőlegesek talppontjai. A definíciója miatt $AT_a = c$. Az AOB háromszögben $OA = OB$, továbbá az AOB háromszög területe megegyezik az AOP és a BOP háromszögek területeinek összegével, vagyis:

$$\frac{1}{2}OB \cdot AT_a = \frac{1}{2}OA \cdot PT_2 + \frac{1}{2}OB \cdot PT_1.$$

Azaz

$$c = AT_a = PT_2 + PT_1,$$

tehát P hozzátartozik a mértani helyhez. Ha a Q pont nincs rajta az AB szakaszon, akkor messe a Q -n átmenő, AB -vel párhuzamos egyenes e -t, illetve f -t a B' , illetve A' pontokban, legyen továbbá az A' -ből e -re bocsátott merőleges talppontja T_a (3. ábra).



Hasonlóan láthatjuk be, hogy a mértani hely a másik három szögtartományban is egy-egy szakasz. Ezen szakaszok végpontjai páronként közösek, így a szakaszok egy négyszöget alkotnak. A szakaszok merőlegesek a megfelelő szögtartomány belső szögfelezőjére, tehát az általuk alkotott négyszög téglalap; vagyis a keresett mértani hely egy téglalap négy oldala (4. ábra).

