

Először két olyan művelet elvégzésére mutatunk eljárást, amelyet a továbbiakban gyakran fogunk használni.

1. Egy x kiindulási szám és egy racionális szám szorzása.

Legyen a racionális szám $\frac{p}{q}$, ahol p egész, q pozitív egész szám. Ekkor

$$\frac{x}{q} = \frac{1}{q \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_q}, \quad \text{így} \quad \frac{|p| \cdot x}{q} = \underbrace{\frac{x}{q} + \frac{x}{q} + \dots + \frac{x}{q}}_{|p|}.$$

Ha p negatív szám, akkor ugyanezt $-x = (x - x - x)$ -szel hajtjuk végre.

2. Egy x szám köbének kiszámítása:

$$x^3 = \frac{x^3 - x}{1} + x = \frac{1}{\frac{x^2+1-x^2}{x^3-x}} + x = \frac{1}{\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x}} + x = \frac{1}{\frac{1}{x-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}} + x.$$

Most megadunk egy eljárást, amellyel bármely $\sqrt{x} + y$ alakú számból (x, y racionális számok, $y \neq 0$, $y^2 \neq x$) előállítható az 1. (Az $x = 19, y = 92$ választással az a) feladatot oldjuk meg.) Az előzőek szerint kiszámíthatjuk $(\sqrt{x} + y)^3$ -t, majd ebből $(x + 3y^2)$ -szer (ez egy racionális szám) levonjuk $(\sqrt{x} + y)$ -t:

$$(\sqrt{x} + y)^3 - (x + 3y^2)(\sqrt{x} + y) =$$

$$x\sqrt{x} + 3xy + 3y^2\sqrt{x} + y^3 - x\sqrt{x} - xy - 3y^2\sqrt{x} - 3y^3 = 2xy - 2y^3 = 2y(x - y^2).$$

Ez egy nullától különböző racionális szám, jelölje $\frac{q}{p}$. Megszorozzuk $\frac{p}{q}$ -val, s így megkapjuk az 1-et.

A következőkben $\sqrt[19]{x}$ alakú számból állítjuk elő az 1-et (b) eset). (x nullától különböző racionális szám.) Kiszámítjuk először

$$(\dots ((\underbrace{\sqrt[19]{x}}_{7\text{-szer}})^3)^3 \dots)^3 = \sqrt[19]{x^{(3^7)}} = \sqrt[19]{x^{2187}} = \sqrt[19]{x^{115 \cdot 19} \cdot x^2} = x^{115} \cdot \sqrt[19]{x^2}$$

értékét. Mivel $x^{115} \neq 0$ racionális szám, azért ezt x^{-115} -nel szorozva $\sqrt[19]{x^2}$ -et kapjuk. Ezután

$$\frac{1}{\sqrt[19]{x} - \sqrt[19]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[19]{x} + \sqrt[19]{x^2}} = \frac{2 \sqrt[19]{x^2}}{\sqrt[19]{x^2} - \sqrt[19]{x^4}} = \frac{2}{1 - \sqrt[19]{x^2}}$$

reciprokának kétszeresét véve $(1 - \sqrt[19]{x^2})$ -hez jutunk, ehhez adjuk még hozzá $\sqrt[19]{x^2}$ -et.

A c) esetben először megmutatjuk, hogy ha x és y olyan racionális számok, melyek négyzetgyöke irracionális, akkor $a\sqrt{x} + b\sqrt{y}$ alakú számokból (a, b racionálisak) csak ugyanilyen alakú számot kaphatunk. Az összeadásra és kivonásra ez ekvivalens. Vizsgáljuk a reciprokképzést ($a^2 + b^2 \neq 0$ esetén):

$$\frac{1}{a\sqrt{x} + b\sqrt{y}} = \frac{a\sqrt{x} - b\sqrt{y}}{(a\sqrt{x} + b\sqrt{y})(a\sqrt{x} - b\sqrt{y})} = \frac{a\sqrt{x} - b\sqrt{y}}{a^2x - b^2y} = \frac{a}{a^2x - b^2y}\sqrt{x} + \frac{b}{b^2y - a^2x}\sqrt{y}.$$

Ha $a\sqrt{x} - b\sqrt{y} = 0$, akkor nem bővíthetünk vele. Ám ekkor $\sqrt{x} = \frac{b}{a}\sqrt{y}$ (ha $a = 0$, akkor b is nulla lenne), így $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = a\left(\frac{b}{a}\sqrt{y}\right) + b\sqrt{y} = 2b\sqrt{y}$, és ennek reciproka $\frac{1}{2b\sqrt{y}} = \frac{1}{2by} \cdot \sqrt{y}$, szintén $c\sqrt{x} + d\sqrt{y}$ alakú.

Végül belátjuk, hogy az 1 nem áll elő ilyen alakban; vagyis ebben az esetben a válasz nemleges. Tegyük fel ugyanis, hogy $1 = a\sqrt{x} + b\sqrt{y}$, alkalmas a és b racionális számokkal. Ekkor $(1 - a\sqrt{x})^2 = b^2y$, azaz $1 - 2a\sqrt{x} + a^2x = b^2y$, $2a\sqrt{x} = 1 + a^2x - b^2y$. Mivel $1 + a^2x - b^2y$ racionális és $\sqrt{x}$ irracionális, azért szükségképpen $a = 0$. Így $1 = b\sqrt{y}$, $\sqrt{y} = \frac{1}{b}$, holott $\sqrt{y}$ irracionális. Ez ellentmondás, tehát állításunk igaz.

György András (Budapest, Árpád Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Azon, hogy adott egy kiindulási szám, a következőt értettük. Nem csupán a tizedesjegyei vannak előttünk a számológép kijelzőjén, hanem ismerjük „speciális” előállításait is. Például az a) esetben nemcsak a $\sqrt{x} + y$ számot, hanem magát x -et és y -t, sőt törtfelbontásukat is ismertnek tekintjük (nem a számológépben, hanem a „fejünkben”). Ezért vonhattuk ki $(\sqrt{x} + y)^3$ -ból $(\sqrt{x} + y) \cdot (x + 3y^2)$ -et.

2. Egy további, viszonylag általános előállítási tételt is kimondhatunk: az x kiindulási számból megkaphatjuk az összes

$$y_k = \frac{a_{2k}x^{2k} + a_{2k-2}x^{2k-2} + \dots + a_0}{a_{2k-1}x^{2k-1} + a_{2k-3}x^{2k-3} + \dots + a_1x},$$

$$z_k = \frac{a_{2k}x^{2k} + a_{2k-2}x^{2k-2} + \dots + a_0}{a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \dots + a_1x}$$

alakú számokat (az a_i -k racionálisak). Ezt például k szerinti indukcióval bizonyíthatjuk.

Szeredi Tibor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

Természetesen az a) és b) esetre számos más konkrét eljárás is adható.