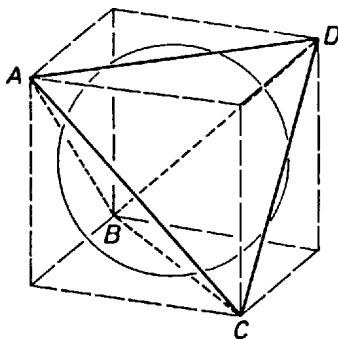
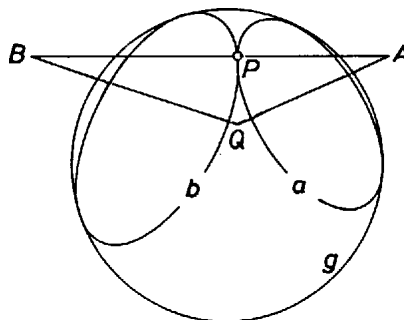


A kérdésre a válasz 4. Az 1. ábrán látható kocka beírt gömbjét az $ABCD$ szabályos tetraéder minden éle érinti, mert az élek felezőpontjai éppen a kocka lapközéppontjai, s a beírt gömb a lapokat éppen a középpontban érinti.



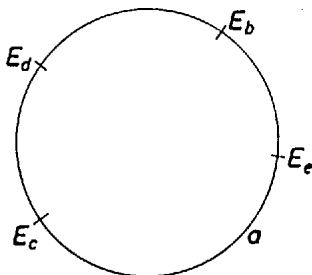
1. ábra

Megmutatjuk, hogy 5 pont már nem helyezhető el a feltételeknek megfelelően. Tegyük fel, hogy az A, B, C, D, E pontok közül bármely kettő összekötő egyenese érinti a g gömböt. Egy gömbhöz egy külső pontból húzott érintők egy kúpot alkotnak, amelyik egy körben érinti a gömböt. Így az A, B, C, D, E pontoknak g -n megfeleltethető egy-egy a, b, c, d, e kör. Megmutatjuk, hogy ezek a körök páronként érintik egymást.



2. ábra

Ha például az AB egyenes P -ben érinti g -t, akkor P az a és b körön is rajta van (2. ábra). Ha egy P -től különböző Q pont is rajta lenne mindkét körön, akkor AQ és BQ is érintők lennének, $AP = AQ$ és $BP = BQ$ teljesülne, ami ellentmondana a háromszög-egyenlőtlenségből következő $AP + BP = AB < AQ + QB$ feltételnek. Tehát a g gömbön levő a, b, c, d, e körök közül bármelyik kettő érinti egymást. Mivel körök érintési pontja rajta van a köröknek megfelelő pontok összekötő egyenesén, és az A, B, C, D, E pontok közül bármelyik három nem kollineáris, azért a körök érintkezési pontjai mind különbözőek.



3. ábra

Jelöljük az a körnek a másik négy körrel való érintési pontjait E_b, E_c, E_d és E_e -vel. Feltehetjük, hogy az E_b és E_c pontok a köríven elválasztják az E_d és E_e pontokat (3. ábra). A b, c, d és e körök közül kettő csak akkor érintkezhet, ha az a kör síkja által meghatározott két féltér közül ugyanabban helyezkedik el. Tehát mind a négy kör ugyanabban a féltérben van. Viszont (az előbbihez hasonló okból) a b és c körök érintési pontja, valamint az E_b és E_c pontok által meghatározott sík elválasztja egymástól a d és e köröket, így azok nem érintkeznek. Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy 5 pont már nem helyezhető el a feltételeknek megfelelően.