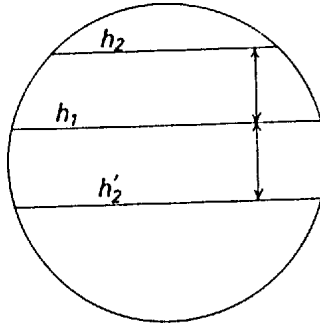


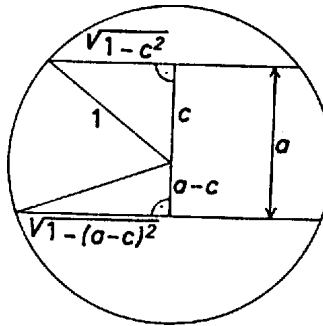
Megmutatjuk, hogy a lefedéshez szükséges körök száma $\left\lceil \frac{b}{\sqrt{4-a^2}} \right\rceil$ (ahol $\lceil x \rceil$ - az x felső egész része – a legkisebb, x -nél nem kisebb egész számot jelöli).



1. ábra

Először belátjuk, hogy egy egységsugarú kör két, egymástól $a \leq \sqrt{3}$ távolságra lévő párhuzamos húrjának együttes hossza legfeljebb $2\sqrt{4-a^2}$. Ha a h_1 és h_2 húrokat a velük párhuzamos átmérő nem választja szét, akkor a középponttól távolabbi húr (h_2) egyenesét a másik húr egyenesére tükrözve a kapott h_1 és h'_2 húrok együttes hossza nyilván nagyobb, mint h_1 és h_2 hosszának összege (1. ábra).

Ezt a lépést véges sokszor ismételve elérhetjük, hogy a kör középpontja a két húr közt helyezkedjék el. Eközben a két húr távolsága a középponttól nem változik. Ilyen esetben, ha a kör középpontjának az egyik húrtól való távolsága c , akkor Pitagorasz tétele szerint a két húr együttes hossza (2. ábra): $2(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{1-(a-c)^2})$.



2. ábra

Elegendő tehát megmutatnunk, hogy

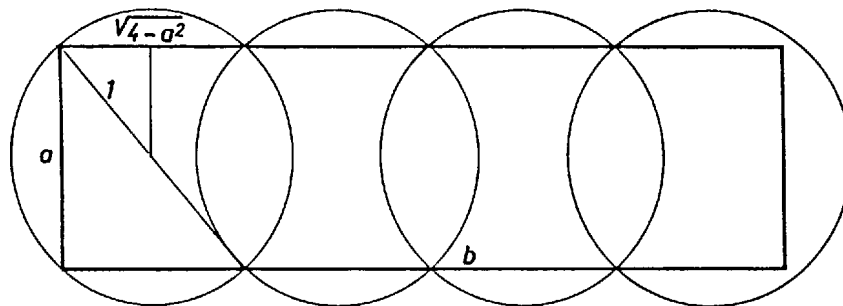
$$(1) \quad \sqrt{1-c^2} + \sqrt{1-(a-c)^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Négyzetre emelve és rendezve:

$$\sqrt{(1-c^2)(1-(a-c)^2)} \leq 1 + c^2 - ac.$$

Ismét négyzetre emelve és rendezve: $0 \leq (2c-a)^2$.

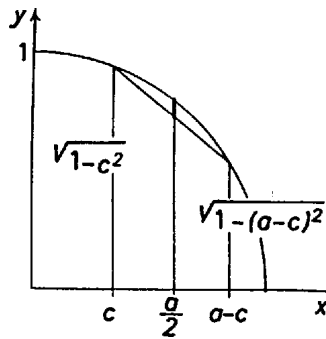
Ez nyilván igaz, s mivel mindig pozitív számokat emeltünk négyzetre, ezért (1) is fennáll. Tehát egy egységsugarú kör a téglalap két b hosszúságú oldalából összesen legfeljebb $2\sqrt{4-a^2}$ hosszú darabot fed le. Ha viszont a körök lefedik a teljes téglalapot, akkor le kell hogy fedjék a $2b$ hosszúságú oldalakat is. Ezért a lefedéshez legalább $\left\lceil \frac{b}{\sqrt{4-a^2}} \right\rceil$ darab körre van szükség.



3. ábra

Könnyen látható, hogy ennyi viszont elég is. Ha a köröket a 3. ábrán látható módon helyezzük el – középpontjaik a téglalap egyik szimmetriatengelyén, metszéspontjaik pedig a téglalap kerületén vannak –, akkor lefedik a téglalapot. Ezzel állításunkat beláttuk.

Megjegyzés. Az (1) egyenlőség egyszerűbben következik abból, hogy az $y = \sqrt{1 - x^2}$ függvény (amelynek képe egy negyedkör) alulról konvex (4. ábra).



4. ábra