Legyen a háromszög átfogójának a felezőpontja F, és használjuk az *ábra* további jelöléseit is. A C csúcs körül $CE = CH$ sugárral húzott kör a belsejében tartalmazza a CF súlyvonal és a beírt kör C-hez közelebbi N metszéspontját, így

$$CN < CE = \frac{a+b-c}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{c}{2} = c\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) < \frac{c}{3} = \frac{2}{3}CF.$$

1993-02-069-1.eps

Mivel a háromszög derékszögű, és M a súlypontja, azért $CM = \frac{2}{3}CF = \frac{c}{3}$.

Írjuk fel először a C, majd az F pontnak a beírt körre vonatkozó hatványát a szelőtétel felhasználásával:

$$CN \cdot \frac{c}{3} = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2, \tag{1}$$

$$\frac{c}{6}\left(\frac{c}{2} - CN\right) = FG^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Az (1) egyenletet a (2) kétszereséhez adva:

$$\frac{c^2}{6} = \frac{(b-a)^2}{2} + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2.$$

Mindkét oldalt $\frac{12}{c^2}$-tel szorozva:

$$2 = 6(\sin\beta - \cos\beta)^2 + 3(\cos\beta + \sin\beta - 1)^2,$$
$$6(\cos\beta + \sin\beta) = -3\sin 2\beta + 10.$$

Itt mindkét oldal a β hegyesszög bármely értékére pozitív, így négyzetreemeléssel az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$36(1 + \sin 2\beta) = 9\sin^2 2\beta - 60\sin 2\beta + 100.$$

A $\sin 2\beta$-ra kapott másodfokú egyenlet 0 és 1 közé eső megoldása $\sin 2\beta = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{3}$, tehát a keresett hegyesszögek: 22,8° és 67,2°.