

Először azt mutatjuk meg, hogy

$$7^3|a^2 + ab + b^2 \iff 7^3|(18a - b)(18b - a).$$

Valóban, $(18a - b)(18b - a) = -18a^2 - 18b^2 + 324ab = 7^3ab - 18(a^2 + ab + b^2)$, amiből a fenti ekvivalencia nyilvánvaló.

Ha most olyan a, b számokat tekintünk, amelyekre $7 \nmid a$ és $7 \nmid b$ teljesül, akkor

$$7^3|(18a - b)(18b - a) \iff 7^3|18a - b \quad \text{vagy} \quad 7^3|18b - a$$

is fennáll. Tegyük fel ugyanis, hogy $7^3|(18b - a)(18a - b)$, de $7^3 \nmid 18a - b$ és $7^3 \nmid 18b - a$. Ekkor szükségképpen $7|18a - b$ és $7|18b - a$, amiből $7|18a - b + 18b - a = 17a + 17b$ adódik. Ebből $7|a + b$, majd $7|(18a - b) + (a + b) = 19a$ következik, tehát $7|a$ teljesül.

Ezzel az egyik irányú következtetést beláttuk, a másik pedig nyilvánvaló. Tehát

$$7^3|a^2 + ab + b^2, \quad 7 \nmid a, \quad 7 \nmid b \iff 7 \nmid a, \quad 7 \nmid b \quad \text{és} \quad 7^3|18a - b \quad \text{vagy} \quad 7^3|18b - a.$$

Ezek szerint a feltételeket kielégítő számpárok mind olyanok, amelyekre

$$7 \nmid a, \quad 7 \nmid b \quad \text{és} \quad 7^3|18a - b \quad \text{vagy} \quad 7^3|18b - a,$$

és az ilyen számpárok valamennyien jók is. Ezzel tehát megadtuk az összes megoldást; egy ilyen például az $a = 1, b = 18$:

$$a^2 + ab + b^2 = 1 + 18 + 18^2 = 343 = 7^3.$$

Megjegyzés. Természetesen nem kellett az összes megoldást megadni ahhoz, hogy valaki 5 pontot kapjon dolgozatára – a kitűzésben csak egy számpár megadása volt a feladat.