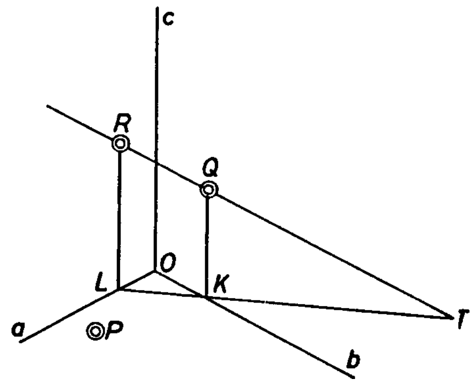
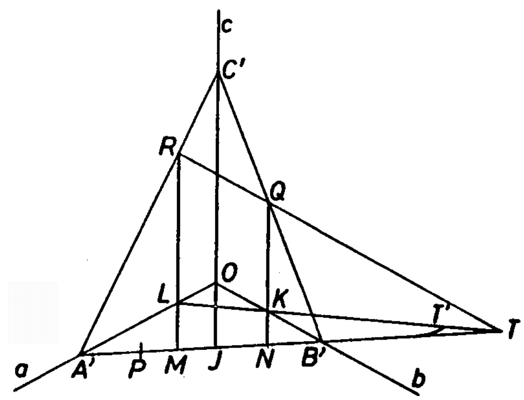
Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük a három félegyenest a, b, c-vel, a közös végpontjukat O-val, a három szögtartományban adott pontokat pedig az *1.ábrán* látható elhelyezkedés szerint P, Q, R-rel. Húzzunk Q-n és R-en át párhuzamosokat c-vel, messék ezek b-t és a-t K-ban, illetve L-ben, végül QR és KL metszéspontját jelöljük T-vel.



1. ábra



2. ábra

Legyen C' olyan pontja a c félegyenesnek, amelyre $C'R$ metszi a-t, $C'Q$ pedig metszi b-t. (Ez teljesül, ha C' „elég messze" van O-tól.) Legyen a két metszéspont A', illetve B' (*2. ábra*). Megmutatjuk, hogy az $A'B'$ egyenes – C' helyzetétől függetlenül – mindig átmegy T-n. Jelöljük $A'B'$ és LK metszéspontját T'-vel. Bebizonyítjuk, hogy $T' \equiv T$. Legyen az RL, $C'O$ és QK egymással párhuzamos egyeneseknek $A'B'$-vel való metszéspontja rendre M, J és N. Mivel $RM \parallel C'J$ és $C'J \parallel QN$, ezért

$$\frac{RL}{LM} = \frac{C'O}{OJ} \text{ és } \frac{C'O}{OJ} = \frac{QK}{KN}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{RL}{LM} = \frac{QK}{KN}.$$

Átrendezve $\dfrac{KN}{LM} = \dfrac{QK}{RL}$.

Másrészt KN és LM az $LT'M$ szög, QK és RL pedig az RTL szög párhuzamos szelői, ezért

$$\frac{KN}{LM} = \frac{KT'}{LT'} \text{ és } \frac{QK}{RL} = \frac{KT}{LT}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{KT'}{LT'} = \frac{KT}{LT}.$$

Ez utóbbi viszont csak akkor teljesülhet, ha $T' \equiv T$. Tehát $A'B'$ mindig átmegy T-n.

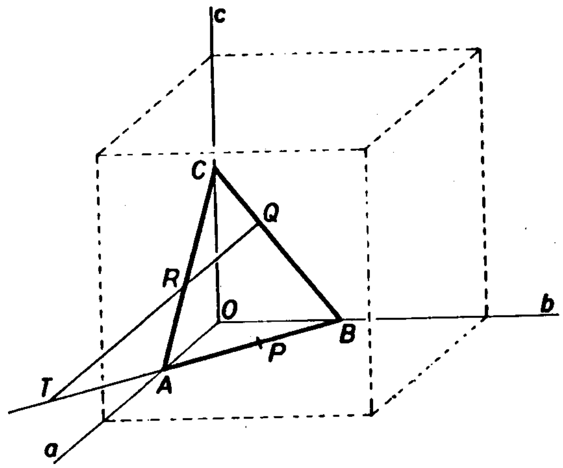
Ezek alapján a szerkesztés menete a következő: R és Q ismeretében megszerkesztjük a T pontot. A TP egyenes kimetszi az a és b félegyenesekből az A és B pontokat, végül AR és c közös pontja lesz C. A párhuzamos szelők tételének segítségével könnyen belátható, hogy az így szerkesztett ABC háromszög BC oldala átmegy Q-n, tehát a háromszög eleget tesz a feladat feltételeinek. (Ha az RQ és LK egyenesek párhuzamosak, akkor a szerkesztésben TP szerepét a P-n átmenő, RQ-val párhuzamos egyenes veszi át.)

A feladatnak mindig egy megoldása van, hacsak az adódó A, B pontpárra $AO > KO$ és $BO > LO$.

Róka Dániel (Budapest, Szt.István Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések 1. A megoldás során nem használtuk ki, hogy a szögtartományok 120°-osak. Ez a feltétel csak a diszkussziót teszi egyszerűvé.

2. Feladatunk tulajdonképpen a következő egyszerű térgeometriai feladat síkra vetített változata: *Adott egy kocka három szomszédos lapján a P, Q és R pont. Szerkesszük meg a három lap közös csúcsából kiinduló három élen az A, B, C pontokat úgy, hogy az ABC háromszög oldalai átmenjenek a P, Q, R pontokon (3. ábra).*



3. ábra

Ennek megoldása egyszerű: a PQR sík kimetszi az élekből az A, B, C pontokat. Viszont ez a megoldás mutatja az eredeti megoldásunkban nagyon fontos T pont szerepét: T nem más, mint az RQ egyenesnek és a kocka P-t tartalmazó lapjának a döféspontja, ezt LK-val, RQ-nak azon a lapon lévő vetületével metszettük ki.