

I. megoldás. Az

$$f(x) = x^2 - x(a + b + c) + ab + bc + ca$$

jelöléssel azt kell igazolnunk, hogy $f(d) \geq 0$. Könnyen látható, hogy

$$x \cdot f(x) - abc = (x - a)(x - b)(x - c),$$

tehát

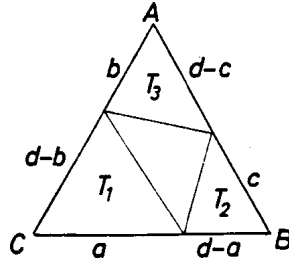
$$(1) \quad f(d) = \frac{(d - a)(d - b)(d - c) + abc}{d},$$

ahonnan a bizonyítandónál élesebb

$$f(d) \geq \frac{abc}{d}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, hiszen (1) számlálójában $(d - a)(d - b)(d - c) \geq 0$.

II. megoldás. Az alábbi megoldás geometriai jelentést tulajdonít a feladatban szereplő mennyiségeknek. Tekintsünk egy d oldalú ABC szabályos háromszöget, melynek csúsaiból az ábra szerint azonos körüljárás szerint mérjük fel az a , b illetve a c hosszúságú szakaszokat.



Az A , B és C csúcsú kis háromszögek területének összege nyilván kisebb, mint az ABC háromszögé. A területeket a 60° -os szög felhasználásával felírva

$$T_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a(d - b); \quad T_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} c(d - a);$$

$$T_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} b(d - c); \quad T_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot d^2.$$

A $T_1 + T_2 + T_3 < T$ egyenlőtlenség mindkét oldalát $\frac{\sqrt{3}}{4}$ -gyel osztva a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Megjegyzés. Mindkét bizonyításból kiderül, hogy a feltételek mellett a bizonyítandó egyenlőtlenségben nem állhat egyenlőség.