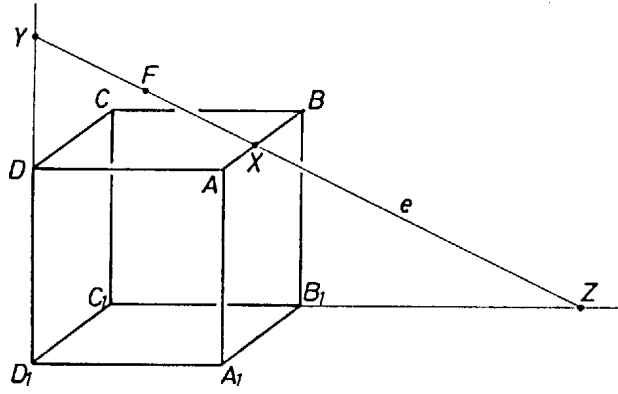
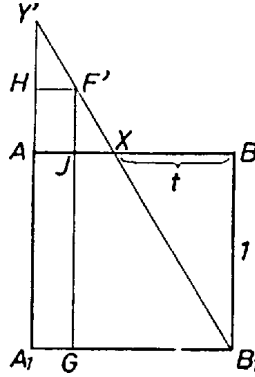


I. megoldás. Három esetet különböztetünk meg attól függően, hogy X az AB él belső pontja, vagy pedig a szakasz A -n, vagy B -n túli meghosszabbításán helyezkedik el. A részletes számításokat abban az esetben végezzük el, ha X az AB él belső pontja.



1. ábra

Jelöljük F -fel az XY szakasz felezőpontját. X , illetve Y az egymással párhuzamos ABA_1B_1 , illetve CDC_1D_1 sík egy-egy pontja, ezért F rajta van e két sík középpárhuzamos síkján; tehát F távolsága e két lapsíktól $\frac{1}{2}$. Vetítsük a kockát és az e egyenest az ABA_1B_1 oldallap síkjára. F és Y vetülete legyen F' és Y' , az F' -ből az AA_1BB_1 négyzet oldalaira bocsátott merőlegesek talppontjai pedig a 2. ábra szerint G , H és J .



2. ábra

A merőleges vetítés megőrzi a képsíkkal párhuzamos szakaszok hosszát és az egy egyenesre illeszkedő szakaszok arányát; ezért $F'G$ megegyezik F -nek az $A_1B_1C_1D_1$ laptól való távolságával, $F'H$ pedig F -nek az ADA_1D_1 laptól való távolságával, továbbá F' az $Y'X$ szakasz felezőpontja. Az $Y'AX$ és a B_1BX derékszögű háromszögek hasonlósága folytán

$$\frac{Y'A}{AX} = \frac{B_1B}{BX}, \quad \text{vagyis} \quad Y'A = \frac{AX \cdot B_1B}{BX} = \frac{(1-t) \cdot 1}{t} = \frac{1-t}{t}.$$

Ezért

$$F'J = \frac{1}{2}Y'A = \frac{1-t}{2t}, \quad F'G = F'J + JG = \frac{1-t}{2t} + 1 = \frac{1+t}{2t},$$

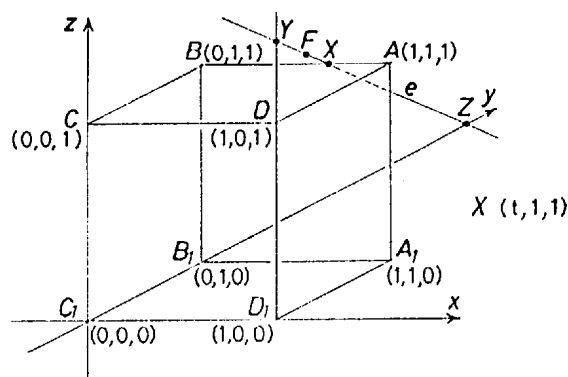
$$F'H = \frac{1}{2}AX = \frac{1-t}{2},$$

végül pedig F -nek a BCB_1C_1 laptól való távolsága $1 - F'H = \frac{1+t}{2}$.

Lényegében ugyanígy határozhatjuk meg a távolságokat akkor is, ha X az AB szakasz valamelyik meghosszabbításán van. Az eredményeket a következő táblázatban foglaljuk össze:

a lap	F távolsága a laptól, ha X az AB szakasz		
	belső pontja	A -n túli meghosszabbításán van	B -n túli meghosszabbításán van
$ABCD$	$\frac{1-t}{2t}$	$\frac{t-1}{2t}$	$\frac{1+t}{2t}$
$A_1B_1C_1D_1$	$\frac{1+t}{2t}$	$\frac{1+t}{2t}$	$\frac{1-t}{2t}$
ABA_1B_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
CDC_1D_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
ADA_1D_1	$\frac{1-t}{2}$	$\frac{t-1}{2}$	$\frac{1+t}{2}$
BCB_1C_1	$\frac{1+t}{2}$	$\frac{1+t}{2}$	$\frac{1-t}{2}$

II. megoldás. Helyezzük el a kockát egy térbeli derékszögű koordináta rendszerben úgy, hogy C_1 legyen az origó, D_1 , B_1 és C pedig rendre az x , y , z tengely pozitív felére illeszkedjen. Ekkor A koordinátái $(1; 1; 1)$, B koordinátái $(0; 1; 1)$, hasonlóan $C(0; 0; 1)$, $D(1; 0; 1)$, $A_1(1; 1; 0)$, $B_1(0; 1; 0)$, $C_1(0; 0; 0)$, D_1 pedig $(1; 0; 0)$. Az AB egyenes az $y = 1$ egyenletű ABA_1B_1 és a $z = 1$ egyenletű $ABCD$ síkok metszésvonala, tehát az erre az egyenesre illeszkedő X pont második és harmadik koordinátája is 1. Legyen X első koordinátája t ; ekkor $BX = |t|$ (3. ábra).



3. ábra

Az e egyenes metszi a B_1C_1 egyenest, tehát benne van a B_1C_1X síkban. A B_1 , C_1 és X pontok koordinátái kielégítik az $x = tz$ egyenletet, tehát ez a B_1C_1X sík egyenlete. Az Y pont rajta van a B_1C_1X , az ADA_1D_1 és a CDC_1D_1 síkokon. E két utóbbi egyenlete, $x = 1$ és $y = 0$. Tehát Y koordinátái kielégítik az $x = 1$, $y = 0$ és $y = tz$ egyenleteket, azaz $Y\left(1; 0; \frac{1}{t}\right)$. Így XY felezőpontjának koordinátái:

$$F\left(\frac{1}{2}(t+1); \frac{1}{2}(1+0); \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)\right).$$

A kocka oldallapjainak egyenletei és F -nek ezen oldallapoktól való távolsága:

$$\begin{array}{lll} ABCD : & z = 1 & \left| \frac{1+t}{2t} - 1 \right| = \left| \frac{1-t}{2t} \right|; \\ A_1B_1C_1D_1 : & z = 0 & \left| \frac{1+t}{2t} \right|; \\ ABA_1B_1 : & y = 1 & \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2}; \\ CDC_1D_1 : & y = 0 & \left| \frac{1}{2} - 0 \right| = \frac{1}{2}; \\ ADA_1D_1 : & x = 1 & \left| \frac{1+t}{2} - 1 \right| = \left| \frac{t-1}{2} \right|; \\ BCB_1C_1 : & x = 0 & \left| \frac{1+t}{2} \right|. \end{array}$$

(Ezekből a képletekből egyszerű számolással kaphatjuk az I. megoldás végén található táblázatot, ha felhasználjuk, hogy $BX = |t|$.)