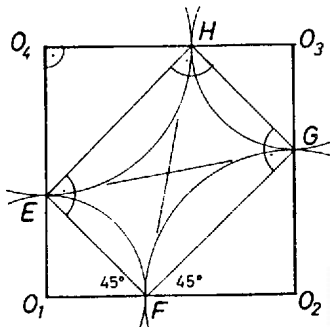


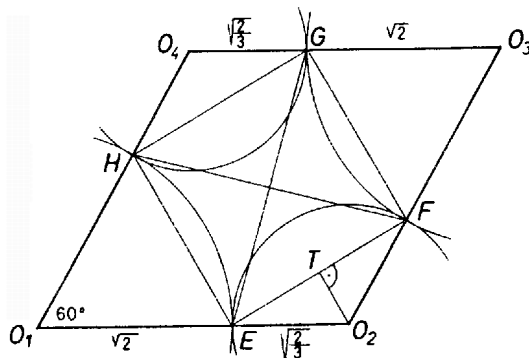
A feladat állítása nem igaz. Az alábbiakban egy-egy ellenpéldát adunk az állítás mindkét felére.



1. ábra

Tekintsünk egy 5 egység oldalú négyzetet, amelynek csúcsai  $O_1, O_2, O_3, O_4$ . Rajzoljunk  $O_1$  és  $O_3$  körül 2 egység,  $O_2$  és  $O_4$  körül pedig 3 egység sugarú köröket, ezek érintési pontjai legyenek  $E, F, G$  és  $H$  (1. ábra). Az  $O_1EF, O_2FG, O_3GH, O_4HE$  derékszögű háromszögek egyenlő szárúak, ezért az  $EFGH$  négyszög minden szöge  $180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ , tehát  $EFGH$  téglalap. Viszont  $EF = \sqrt{2} \cdot O_1F = 2\sqrt{2} \neq 3\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot O_2F = FG$ , tehát  $EFGH$  nem négyzet, vagyis átlói nem merőlegesek. Ezért az  $O_1O_2O_3O_4$  húrnégyszög cáfolja a feladat állításának „csak akkor” felét.

Az állítás „akkor” felének cáfolatára tekintsük a következő példát: Legyen az  $O_1O_2O_3O_4$  rombusz minden oldala  $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{2}$  egység, hegyes szöge  $60^\circ$ . Rajzoljunk  $O_1$  és  $O_3$  körül  $\sqrt{2}$  egység,  $O_2$  és  $O_4$  körül pedig  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  egység sugarú köröket, ezek érintési pontjai legyenek  $E, F, G$  és  $H$  (2. ábra).



2. ábra

Az  $O_1O_2O_3O_4$  rombusz nem húrnégyszög, hiszen szemközti szögeinek összege  $120^\circ$ , illetve  $240^\circ$ , az  $EFGH$  négyszög viszont négyzet, mert minden szöge  $90^\circ$  (pl.  $\angle HEF = 180^\circ - (\angle HEO_1 + \angle FEO_2) = 180^\circ - \left( \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} + \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} \right) =$

$90^\circ$ ), és  $HE = O_1H = \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2EO_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = EF$ .

Ezzel megmutattuk, hogy a feladat állításának egyik fele sem igaz.

*Megjegyzés.* A feladat, sajnos, tévesen került kitűzésre.

Egy érintőnégyyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha a beírt kör szemben lévő érintési pontjait összekötő húrpár merőleges egymásra.

A feladatban szereplő  $O_1O_2O_3O_4$  négyszög, bár érintőnégyyszög, de a beírt kör érintési pontjai, mint láttuk, általában nem esnek egybe a négy kör érintési pontjaival, így az előbb említett állítás (aminek alkalmazása lett volna a feladat) most nem alkalmazható.