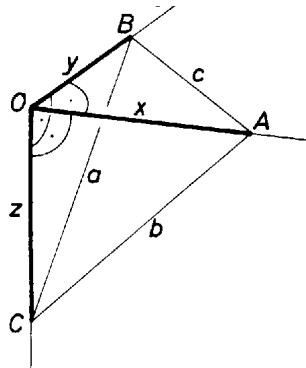


Tegyük fel, hogy egy kocka O csúcsából kiinduló három éle közül egy-egy átmegy az adott pontokon, amelyeket A , B , C -vel jelölünk. (A feladat szövegéből következik, hogy a kocka csúcsából kiinduló *három* él sorra átmegy egy-egy adott ponton.) Jelöljük az ABC háromszög oldalait a szokásos módon a , b , c -vel (ha A , B és C egy egyenesbe esik, akkor nyilván nem létezik megfelelő kocka), az OA , OB , OC távolságokat pedig rendre x , y , z -vel.



A BCO , CAO , ABO háromszögek derékszögűek, ezért Pitagorasz tétele szerint:

$$(1) \quad a^2 = y^2 + z^2,$$

$$(2) \quad b^2 = x^2 + z^2,$$

$$(3) \quad c^2 = x^2 + y^2.$$

(1)-et és (2)-t összeadva, majd abból (3)-at kivonva:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2z^2 > 0.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy $a^2 + c^2 - b^2 > 0$ és $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, tehát a háromszög hegyesszögű. Ezért csak akkor létezik megfelelő kocka, ha ABC hegyesszögű háromszög. Ekkor viszont mindig létezik is. Ha ugyanis ABC tetszőleges hegyesszögű háromszög, amelynek oldalai a , b , c , akkor az (1)–(3) egyenletrendszernek

$$x = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}, \quad z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

megoldása, ezért az A középpontú x sugarú, a B középpontú y sugarú és a C középpontú z sugarú gömböknek van közös pontja. Ha ezt a közös pontot O jelöli, akkor az OA , OB , OC szakaszok egymásra páronként merőlegesek, tehát kiegészíthetők egy, a feltételeknek megfelelő kockává.