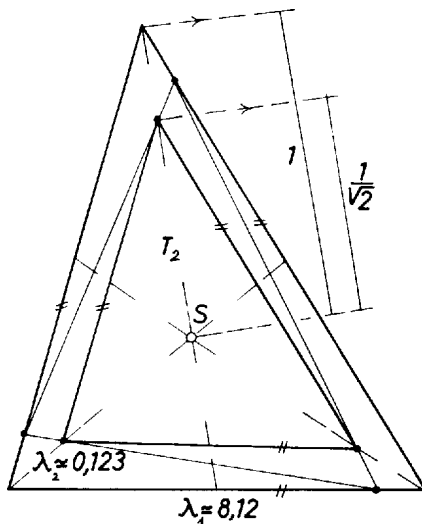


The diagram shows a triangle ABC with vertices A , B , and C . A point I is located inside the triangle. Three lines, AA_1 , BB_1 , and CC_1 , are drawn from each vertex to the opposite side, passing through point I . The segments AI , BI , and CI are labeled T_A , T_B , and T_C respectively. The segments IA_1 , IB_1 , and IC_1 are labeled T_1 . The region AA_1I is shaded with diagonal lines. The base AB is divided into segments λ (from A to C_1) and 1 (from C_1 to B).

Először az AC_1B_1 háromszög T_A területét számoljuk ki. Mivel $\frac{C_1B}{AC_1} = \frac{1}{\lambda}$, ezért $\frac{AB}{AC_1} = \frac{AC_1 + C_1B}{AC_1} = 1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda + 1}{\lambda}$. Ugyanígy kapjuk, hogy $\frac{CA}{CB_1} = \frac{\lambda + 1}{\lambda}$, vagyis $\frac{CA}{B_1A} = \frac{1}{\frac{B_1A}{CA}} = \frac{1}{\frac{CA - CB_1}{CA}} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda + 1}} = \lambda + 1$. A párhuzamos szelők tételéből következően ez utóbbi arány megegyezik az ABC és az AC_1B_1 háromszögek AB , illetve AC_1 oldalához tartozó magasságok arányával. Ezért

$$\text{tehát } T_A = T \cdot \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^2}.$$

$$(1) \quad T_1 = T - (T_A + T_B + T_C) = T \cdot \left(1 - \frac{3\lambda}{(\lambda + 1)^2}\right).$$
$$T_2 = T_1 \left(1 - \frac{3\lambda}{(\lambda + 1)^2} \right) = T \cdot \left(1 - \frac{3\lambda}{(\lambda + 1)^2} \right)^2,$$
$$\frac{1}{2} = \left(1 - \frac{3\lambda}{(\lambda + 1)^2}\right)^2,$$
$$(2) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm \left(1 - \frac{3\lambda}{(\lambda+1)^2} \right).$$


2. ábra

Ha a jobb oldalon az előjel pozitív, akkor rendezés után a

$$(\sqrt{2} - 1)\lambda^2 - (2 + \sqrt{2})\lambda + \sqrt{2} - 1 = 0,$$
$$\text{azaz } \lambda^2 - (3\sqrt{2} + 4)\lambda + 1 = 0$$

egyenletet kapjuk, aminek megoldásai

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(3\sqrt{2} + 4 + \sqrt{30 + 24\sqrt{2}} \right) \approx 8,119,$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(3\sqrt{2} + 4 - \sqrt{30 + 24\sqrt{2}} \right) \approx 0,123.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy λ ezen értékei mellett $T_2 = \frac{1}{2}T$ teljesül.

Ha viszont a (2) egyenlet jobb oldalán az előjel negatív, akkor rendezés után a $\lambda^2 + (3\sqrt{2} - 4)\lambda + 1 = 0$ egyenletet kapjuk, aminek nincsenek valós megoldásai.

Tehát feladatunk feltételeit λ_1 és $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ elégíti ki.

Megjegyzések. 1. Eleve látható volt, hogy ha λ megoldása a feladatnak, akkor $1/\lambda$ is az, hiszen az osztópontok felvételénél mindegy, hogy melyik oldalra esik a hosszabb szakasz.

2. Az ismert $T = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ területképletet használva az (1) egyenletet egyszerűbb számolással is megkaphatjuk.