

Mivel egy sakkiparti két résztvevője 1 ponton osztozkodik, a lejátszott mérkőzések száma egyenlő a résztvevők pontszámának összegével. Ha n játékos jött el az edzésre, akkor a pontok összege és így a mérkőzések M száma:

$$(1) \quad M \leq n \cdot k.$$

Ha az i -edik játékos p_i darab partit játszott, akkor nyilván

$$(2) \quad M = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{2},$$

hiszen az összegzés során minden egyes partit mindkét résztvevője szerint számoltunk. Ha a p_i számok minimuma p , akkor a (2) összeget alulról becsülhetjük:

$$(3) \quad M \geq \frac{\sum_{i=1}^n p}{2} = \frac{n \cdot p}{2}.$$

Egybevetve (1)-et és (3)-at

$$n \cdot k \geq \frac{n \cdot p}{2}, \text{ azaz } 2k \geq p,$$

valóban van tehát olyan játékos, aki legfeljebb $2k$ darab mérkőzést játszott.

Az állítás második részét a játékosok számára vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk, miközben a k értékét természetesen rögzítjük. Ha $n \leq 2k + 1$, akkor az állítás semmitmondó, hiszen minden egyes játékos külön-külön szobába kerülhet. Legyen most $n \geq 2k + 1$ és tegyük föl, hogy az állítás igaz minden olyan edzés résztvevőire, ahol legfeljebb $n - 1$ játékos vett részt. A feladat első része szerint van olyan A játékos, aki legfeljebb $2k$ partit játszott. Ha A -t elhagyjuk és töröljük a mérkőzéseit is, akkor a megmaradó játékosok pontjainak a száma nem nő, így az indukciós feltevés szerint ők elhelyezhetők legfeljebb $2k + 1$ teremben a feladat követelményei szerint. Mivel pedig A legfeljebb $2k$ meccset játszott, ezért legfeljebb ennyi teremben ülhet olyan játékos, aki A -val játszott az edzés során. A termek száma viszont több ennél, így a $2k + 1$ között van olyan terem – esetleg üres – ahol nincs olyan játékos, aki A -val játszott volna. Küldjük A -t ide, ezzel a kívánt elrendezést n darab játékosal is megvalósítottuk.

Megjegyzés. A feladat állítása éles abban az értelemben, hogy a feltételek teljesülése esetén $(2k + 1)$ -nél kevesebb terem már nem feltétlenül elegendő. Ha ugyanis $(2k + 1)$ résztvevője volt az edzésnek, mindenki játszott mindenkivel, és minden egyes parti döntetlenül végződött, akkor a feltételek nyilván teljesülnek és egyetlen terembe sem kerülhet egynél több résztvevő.