

Megoldás. Belátjuk, hogy ha a pozitív a, b, c számokra $a \geq b \geq c$, akkor

$$(1) \quad a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq (a + b + c)^2.$$

Innen a bizonyítandó állítás már következik, hiszen a feltétel szerint $a + b + c \leq 1$, így (1) jobb oldala sem lehet 1-nél nagyobb.

A feltétel szerinti egyenlőtlenségekből

$$\begin{aligned} a \geq b > 0 \text{ miatt } ab &\geq b^2, \\ b \geq c > 0 \text{ miatt } bc &\geq c^2, \text{ végül} \\ a \geq c > 0 \text{ miatt } ac &\geq c^2 \text{ következik.} \end{aligned}$$

A három egyenlőtlenséget összeadva

$$ab + bc + ac \geq b^2 + 2c^2,$$

azaz

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(b^2 + 2c^2) = a^2 + 3b^2 + 5c^2,$$

és ezt kellett bizonyítani.

A bizonyításból kiolvasható, hogy a bizonyítandó állításban pontosan akkor áll egyenlőség, ha $a = b = c$, másfelől $a + b + c = 1$, azaz $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Szeidl Ádám (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján.

Megjegyzés. Általában igazoljuk, hogy ha a pozitív $a_1, \dots, a_n$ számokra

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n, \text{ akkor}$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq \sum_{i=1}^n (2i - 1) \cdot a_i^2.$$

Végezzük el az $(a_1 + \dots + a_n)^2$ négyzetre emelést: így n^2 darab kéttényezős $a_u \cdot a_v$ szorzatot kapunk ($1 \leq u \leq n$ és $1 \leq v \leq n$). Készítsünk n darab csoportot ezekből a szorzatokból! Azok az $a_u a_v$ szorzatok kerüljenek az i edik csoportba, ahol az u, v indexek nagyobbika éppen i . Az i -edik csoportban ekkor $2i - 1$ darab szorzat lesz, ezek a következők: $a_1 a_i, a_2 a_i, \dots, a_i a_i, a_i a_{i-1}, \dots, a_i a_1$. Az a_i számok rendezése és pozitív volta miatt e szorzatok mindegyike legalább a_i^2 , így az i -edik csoportban álló számok összege valóban legalább $(2i - 1) \cdot a_i^2$.

György András (Budapest, Árpád Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján.