

I. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy az egyenlet azonosság, a két oldal minden valós x -re egyenlő. Írjuk x -et $6k + r$ alakba, ahol k egész és $0 \leq r < 6$. Ekkor a minden egész n -re és valós x -re fennálló

$$[x + n] = [x] + n$$

azonosság felhasználásával egyenlőségünk az eredeti

$$\left[\frac{r}{3}\right] + \left[\frac{r+2}{6}\right] + \left[\frac{r+4}{6}\right] = \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r+3}{6}\right]$$

alakot ölti; ez azt jelenti, hogy elegendő a $[0; 6)$ intervallumon igazolni a szóban forgó azonosságot.

Osszuk ehhez négy részre a $[0; 6)$ intervallumot; ez megtehető úgy, hogy az egyes részintervallumokban állandók legyenek a bizonyítandó egyenlőség két oldalán szereplő összegek tagjai. Ezek az intervallumok a következők:

$$I_1 = [0; 2), \quad I_2 = [2; 3), \quad I_3 = [3; 4), \quad I_4 = [4; 6).$$

Az egyes részekben a megfelelő mennyiségek értékét az alábbi táblázat tartalmazza:

r	$\frac{r}{3}$	$\frac{r+2}{6}$	$\frac{r+4}{6}$	Bal oldal értéke	$\frac{r}{2}$	$\frac{r+3}{6}$	Jobb oldal értéke
$[0; 2)$	$[0; \frac{2}{3})$	$[\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$	$[\frac{2}{3}; 1)$	0	$[0; 1)$	$[\frac{1}{2}; \frac{5}{6})$	0
$[2; 3)$	$[\frac{2}{3}; 1)$	$[\frac{2}{3}; \frac{5}{6})$	$[1; \frac{7}{6})$	1	$[1; \frac{3}{2})$	$[\frac{5}{6}; 1)$	1
$[3; 4)$	$[1; \frac{4}{3})$	$[\frac{5}{6}; 1)$	$[\frac{7}{6}; \frac{4}{3})$	2	$[\frac{3}{2}; 2)$	$[1; \frac{7}{6})$	2
$[4; 6)$	$[\frac{4}{3}; 2)$	$[1; \frac{4}{3})$	$[\frac{4}{3}; \frac{5}{3})$	3	$[2; 3)$	$[\frac{7}{6}; \frac{3}{2})$	3

Látható, hogy az egyenlőség minden $0 \leq r < 6$ valós számra teljesül, és így a bevezetőben említettek szerint valóban

$$\left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x+2}{6}\right] + \left[\frac{x+4}{6}\right] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+3}{6}\right]$$

minden valós x -re.

II. megoldás. Az alábbi gondolatmenet egy önmagában is érdekes segédétel felhasználásával kombinatorikai jelentést tulajdonít az egyenlőségben szereplő tagoknak, és ezzel a feladat háttérére is jobban rávilágít. Jegyezzünk meg annyit az első megoldásból, hogy az azonosságot elegendő a $[0; 6)$ intervallumon – valójában bármely $[a; a + 6)$ intervallumon – igazolni; mi most tetszőleges *nemnegatív* x -re bizonyítjuk be. Segítségünkre lesz ehhez az alábbi

Lemma: Ha $0 < r < d$ adott egészek és $x \geq 0$, akkor a $(0; x]$ intervallumban pontosan $[(x + d - r)/d]$ darab olyan egész szám van, amelyik d -vel osztva r maradékot ad. A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy az $r = 0$ esetben ez az érték $[x/d]$.

A bizonyítandó azonosság azonnal következik a lemmából. Eszerint ugyanis ha $x \geq 0$, akkor a bal oldalon a 3-mal osztható, illetve a 6-tal osztva 4 vagy 2 maradékot adó $(0; x]$ -beli egészek száma, a jobb oldalon pedig a páros, illetve a 6-tal osztva 3 maradékot adó $(0; x]$ -beli egészek száma áll. A két számhalmaz nyilván azonos, hiszen mindkét esetben a $(0; x]$ -beli $6k; 6k + 2; 6k + 3; 6k + 4$ alakú számokról van szó; így elemszámuk is egyenlő, a bal oldal tehát valóban egyenlő a jobb oldallal, ha $x \geq 0$.

Hátra van még a lemma bizonyítása. Kezdjük először az $r = 0$ esettel. Ez meglehetősen nyilvánvaló, hiszen a pozitív egész d -nek nyilván éppen annyi többszöröse van 0 és x között, mint ahány pozitív egész van 0 és x/d között: ez utóbbi mennyiség pedig az egészrész definíciója szerint nem más, mint $[x/d]$.

Az általános esetben vegyük észre, hogy az $x \mapsto x + d - r$ megfeleltetés kölcsönösen egyértelműen képezi le a $(0; x]$ -beli, d -vel osztva r maradékot adó számok halmazát a $(d - r; x + d - r]$ -beli, d -vel osztható számok halmazára. Mivel pedig az $r > 0$ esetben a $(0; d - r]$ intervallumban nincsen d -vel osztható szám, a keresett mennyiség éppen a d többszöröseinek a száma a $(0; x + d - r]$ intervallumban, amelyről pedig az $r = 0$ eset vizsgálatakor már láttuk, hogy $[(x + d - r)/d]$ -vel egyenlő.

Ezzel a lemmát teljes egészében igazoltuk és így a bizonyítást befejeztük.