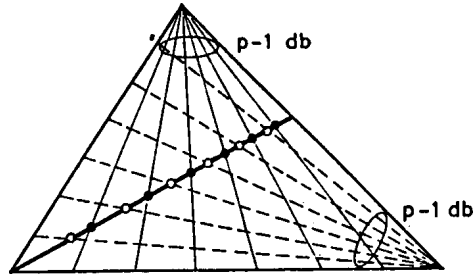
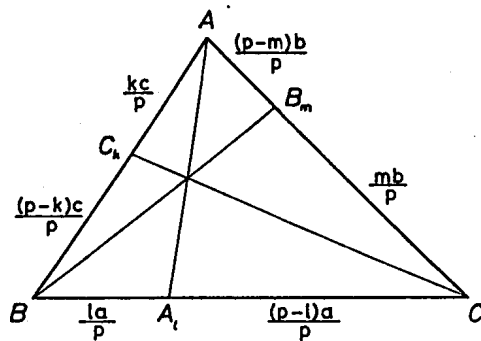


**Megoldás.** Minden szakasz metszi a másik két csúsból kiinduló  $2(p-1)$  darab szakaszt, vagyis minden szakaszon legfeljebb  $2(p-1)$  darab metszéspont van (1. ábra). Összesen  $3(p-1)$  darab szakasz van, és minden metszéspont legalább két szakaszon van rajta, ezért az összes metszéspontok száma legfeljebb  $\frac{2(p-1) \cdot 3(p-1)}{2} = 3(p-1)^2$ , és pontosan akkor ennyi, ha semelyik három szakasz nem megy át egy ponton.



1. ábra



2. ábra

Tegyük fel, hogy van három, egy ponton átmenő szakasz, mégpedig a 2. ábra szerint az  $A$  csúctól számított  $k$ -edik  $C_k$ , a  $B$  csúctól számított  $l$ -edik  $A_l$  és a  $C$  csúctól számított  $m$ -edik  $B_m$  osztópontot a szemközti csúccsal összekötő szakaszok. Ekkor Ceva tétele szerint (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I.*, 1263. feladat):

$$\frac{AC_k}{C_kB} \cdot \frac{BA_l}{A_lC} \cdot \frac{CB_m}{B_mA} = 1,$$

vagyis:

$$\frac{k}{p-k} \cdot \frac{l}{p-l} \cdot \frac{m}{p-m} = 1.$$

Ezt rendezve kapjuk, hogy:

$$2klm = p[p^2 - p(k+l+m) + kl + lm + mk].$$

A bal oldalon álló  $2, k, l, m$  számok mindegyike kisebb  $p$ -nél, ezért szorzatuk nem lehet a  $p$  prímszámmal osztható, tehát ez az egyenlőség nem állhat fenn. Ezért feltevésünk hibás, vagyis a szakaszok között nincs három egy ponton átmenő. A háromszög belsejében lévő metszéspontok száma így valóban  $3(p-1)^2$ .

Szüts Dávid (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján