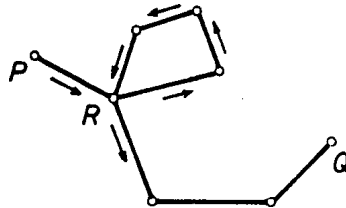
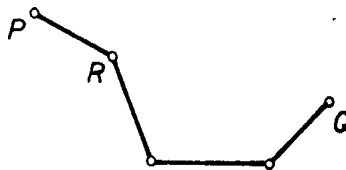


Megoldás. Írjuk először a feladatban szereplő konvex poliéder minden élére a $+1$ számot, és nevezzük a poliéder tetszőleges csúcsát $+1$ -csúcsnak vagy -1 -csúcsnak aszerint, hogy az oda befutó élekre írt számok szorzata $+1$ vagy -1 . Egyelőre tehát a poliéder minden csúcsa $+1$ -csúcs, és azt kell belátnunk, hogy az élek megszámozhatók a $+1$ és a -1 számokkal úgy, hogy mindegyik csúcs -1 -csúcs legyen. Nyilván elegendő megadnunk egy olyan algoritmust, amely – feltéve, hogy van legalább 2 darab $+1$ csúcs – pontosan 2-vel növeli a -1 -csúcsok számát azáltal, hogy néhány élnél az ellentettjére változtatja a ráírt számot. Ha ui. ezt az algoritmust egymás után 50-szer alkalmazzuk, akkor lépésenként rendre 2, 4, 6, ..., 100 lesz a -1 -csúcsok száma, tehát végül valamennyi csúcs -1 -csúcs lesz.

Az algoritmus a következő. Tegyük fel, hogy konvex poliéderünknek van 2 darab $+1$ -csúcsa, legyenek ezek P és Q . Ekkor – mivel konvex poliéderről van szó – P és Q összeköthető a poliéder éleiből álló T töröttvonallal. Ha T -n keresztül P -ből kiindulva elmegyünk Q -ba, akkor feltehetjük, hogy utunk során semelyik csúcsot sem érintettük kétszer, hiszen ilyen esetben T tartalmaz olyan zárt töröttvonalat, amelyet T -ből elhagyva egy kevesebb élből álló T' töröttvonalhoz jutunk, márpedig ez az eljárás csak véges sokszor ismételhető meg, hiszen a T -beli élek száma véges (1. ábra).

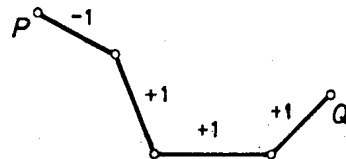


1.a) ábra: T , amely tartalmaz „kétszeres” R csúcsot

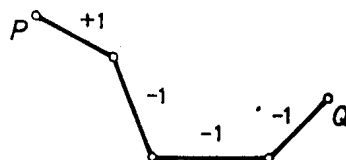


1.b) ábra: T' , amely T -ből egy zárt töröttvonal elhagyásával keletkezett

Feltevésünk szerint tehát a T töröttvonalban a P és Q pontokhoz pontosan 1-1 él csatlakozik, a belső töréspontokhoz pedig pontosan 2. Változtassuk most az ellentettjére a T -beli élekre írt számokat (2. ábra).



2.a) ábra: T az algoritmus alkalmazása előtt (P és $Q + 1$ csúcsok)



2.b) ábra: T az algoritmus alkalmazása után (P és $Q - 1$ csúcsok)

Ekkor a P és a Q csúcsok esetében pontosan a (-1) -szeresére, a belső töréspontok esetében pedig a $(-1)^2$ -szeresére változik az oda befutó élekre írt számok szorzata. Az algoritmus nyilván nem befolyásolja a T -hez nem tartozó csúcsokba futó élekre írt számokat, tehát valóban pontosan kettővel – P -vel és Q -val – növeli a -1 -csúcsok számát.

Akkor is érvényes a megfontolás, ha a P -ből Q -ba vezető töröttvonal egyes belső töréspontjai már egy korábbi lépésben (-1) -csúccsá változtak.

Megjegyzés. Bizonyításunk közben a feladatbeli poliéder konvex voltából csak annyit használtunk fel, hogy a poliéder élhálózata összefüggő, azaz bármely két csúcsa összeköthető élekből álló töröttvonallal. Mivel ez az egyszerű poliéderekre is fennáll (lásd Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Bp. 1987. 26–28. oldal), továbbá

a csúcsok számának (100) helyett akármilyen más (4-nél nem kisebb) páros számot is tekinthettünk volna, ezért igaz a feladat következő általánosítása: Egy páros csúcsszámú egyszerű poliéder élei megszámozhatók a $+1$ és a -1 számokkal úgy, hogy minden egyes csúcsra teljesül, hogy az oda befutó élekre írt számok szorzata -1 .

Ha nem törekszünk arra, hogy minden egyes csúcs esetében -1 legyen az oda befutó élekre írt számok szorzata (tehát, hogy minden egyes csúcs -1 -csúcs legyen), akkor tetszőleges egyszerű poliéderre kiterjeszthetjük az általánosítást: Ha egy egyszerű poliéder éleinek száma e , akkor bármely páros $0 \leq f \leq e$ számra megszámozhatók a poliéder élei a $+1$ és a -1 számokkal úgy, hogy pontosan f legyen a -1 -csúcsok száma (ebben az esetben az algoritmust $f/2$ -szőr kell egymás után alkalmaznunk a megoldáshoz hasonló kiindulási helyzet után).

Rögtön felvetődik a kérdés, hogy – az előző jelöléseket használva – tetszőleges egyszerű poliéder esetében van-e olyan páratlan $0 \leq f \leq e$ szám, amelyre megszámozhatók a poliéder élei a $+1$ és a -1 számokkal úgy, hogy pontosan f legyen a -1 -csúcsok száma. Könnyen észrevehetjük, hogy nincs ilyen f szám, ha ui. lenne, akkor sorra összeszorozva az egyes csúcsoknál az oda befutó élekre írt számok szorzatát, egyrészt -1 -et kellene kapnunk, hiszen páratlan számú -1 -csúcsunk van (f db), másrészt $+1$ -et, mert a szorzás során minden egyes élre írt szám pontosan kétszer szerepelt tényezőként, és $(+1)^2$ -ek ill. $(-1)^2$ -ek szorzata valóban $+1$. Az eddigiek alapján tehát egy e élű egyszerű poliéder esetében pontosan a páros $0 \leq f \leq e$ számokra létezik olyan számozás, amelynél pontosan f db -1 -csúcs (ill. $e - f$ darab $+1$ -csúcs) van.

Harcos Gergely (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gimn., III. o. t.)