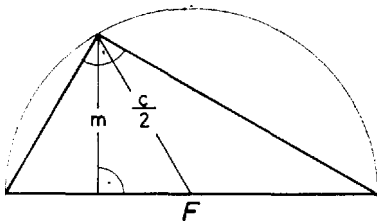


Először egy, a derékszögű háromszögekre vonatkozó egyenlőtlenséget bizonyítunk be:

(*) Ha a és b egy derékszögű háromszög befogói, c pedig az átfogó, akkor

$$a + b < \frac{3}{2}c.$$



1. ábra

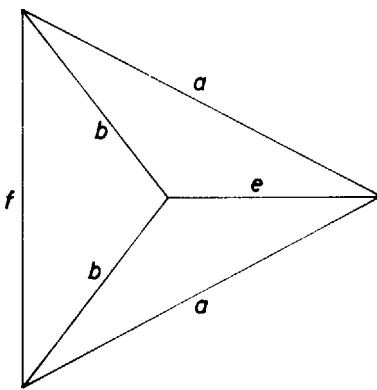
Bizonyítás. Jelöljük m -mel a háromszög átfogóhoz tartozó magasságát. Ekkor $a \cdot b = m \cdot c$, hiszen mindkettő megegyezik a háromszög területének kétszeresével. Pitagorasz tétele szerint $a^2 + b^2 = c^2$ tehát, $a^2 + b^2 < c^2 + m^2$. Vagyis

$$a^2 + b^2 + 2ab < c^2 + m^2 + 2mc$$

azaz

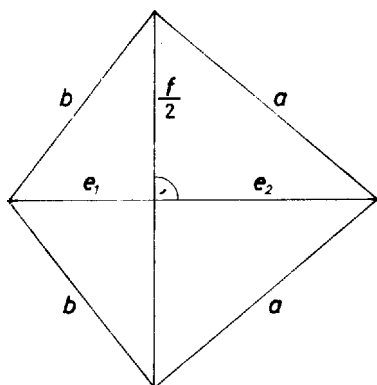
$$(a + b)^2 < (c + m)^2,$$

amiből – pozitív számokról lévén szó – következik, hogy $a + b < c + m$. Másrészt tudjuk, hogy $m < \frac{1}{2}c$ (1. ábra), tehát $a + b < c + \frac{1}{2}c$; ezzel a (*) állítást beláttuk.



2. ábra

Térjünk vissza eredeti feladatunkra. Ha a deltoid konkáv, akkor állításunk triviális (a 2. ábra jelöléseivel: $e < a$, $f < 2b < a + b$, tehát $e + f < 2a + b$). Ha a deltoid konvex, akkor jelöljük oldalainak hosszát a -val és b -vel ($a \geq b$), átlóit e -vel és f -fel úgy, hogy e felezi f -et, f pedig e_1 és e_2 hosszúságú részekre osztja e -t (3. ábra).



3. ábra

Az átlók a deltoidot négy derékszögű háromszögre bontják. A (*) állítást ezen háromszögekre alkalmazva kapjuk, hogy

$$e_1 + \frac{f}{2} < \frac{3}{2}b,$$

és

$$e_2 + \frac{f}{2} < \frac{3}{2}a.$$

Ezeket összeadva és felhasználva, hogy $a \geq b$, kapjuk hogy

$$e + f = e_1 + \frac{f}{2} + e_2 + \frac{f}{2} < \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b \leq 2a + b$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

Lente Gábor (Eger, Gárdonyi G. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A (*) állítás a számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenség felhasználásával egyszerűbben is bizonyítható:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot c}{2},$$

vagyis $a+b \leq \sqrt{2}c$ is igaz.