

I. megoldás. Ha van olyan 1990 nevezőjű tört, melynek tizedestört alakjában négy szomszédos egyforma tizedesjegy van, akkor olyan tört is létezik, amelyben az egyforma tizedesjegyek közvetlenül a tizedesvessző után állnak; ehhez elég, ha a számlálót a megfelelő 10 -hatvánnyal megszorozzuk. Az is föltehető, hogy a számláló kisebb 1990-nél, hiszen a tizedesvessző utáni jegyek csak a számlálónak az 1990-nel való osztási maradékától függenek.

Legyen most a négy egyforma jegyből álló csoport „ $dddd$ ”. Az előbbieket szerint létezik olyan pozitív egész A , melyre

$$(1) \quad \frac{A}{1990} = 0, dddd \dots$$

Ha most a négyjegyű pozitív egész $\overline{dddd}$ számot D -vel jelöljük, akkor (1) pontosan akkor teljesül, ha

$$(2) \quad \frac{D+1}{10^4} > \frac{A}{1990} \geq \frac{D}{10^4},$$

azaz 1990-nel végigszorozva:

$$(3) \quad 0, 99(D+1) > A \geq 0, 99D.$$

Azt kaptuk, hogy pontosan akkor létezik a szóban forgó tulajdonságú tört, ha a $[0, 99D; 0, 99(D+1))$ intervallum tartalmaz egész számot; ez lenne a tört számlálója.

A tíz lehetséges esetet végignézve (ti. $0 \leq d \leq 9$) tapasztalhatjuk, hogy az adott típusú intervallumok belsejében nincsen egész szám, így nem létezik a keresett tört, valóban hiba történt a számolásban.

Stóhr Lóránt (Bp., Apáczai Csere J. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Az I. megoldás föltevéseit és jelöléseit használva tegyük fel, hogy létezik olyan $1 \leq A < 1990$ egész, amelyre teljesül (2). Szorozzuk meg (2)-t $9 \cdot 1990$ -nel, és használjuk fel, hogy $9D = 9 \cdot 1111 \cdot d = (10^4 - 1)d$. Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{9 \cdot 1990 + d \cdot 1990(10^4 - 1)}{10^4} > 9A \geq \frac{d \cdot 1990(10^4 - 1)}{10^4},$$

azaz minden tagból $d \cdot 1990$ -et levonva:

$$(4) \quad \frac{(9-d) \cdot 1990}{10^4} > 9A - 1990d \geq -\frac{1990d}{10^4}.$$

Mivel $(9-d) \cdot 1990$ is, $d \cdot 1990$ is kisebb, mint $2 \cdot 10^4$ (hiszen d számjegy), így (4)-ből az következik, hogy

$$(5) \quad 2 > 9A - 1990d > -2,$$

azaz $9A - 1990d$ szóba jövő értékei: -1 , 0 és 1 .

Mindhárom esetben egy-egy kétismeretlenes diofantikus egyenletet kapunk; olyan megoldást keresünk, melyre $1 \leq A < 1990$ és $0 \leq d < 10$.

A $9A - 1990d = -1$ egyenlet ilyen megoldása $A = 221$, $d = 1$;

a $9A - 1990d = 0$ egyenletnek nincs a fenti típusú megoldása, hiszen $(9, 1990) = 1$,

így az egyenletből $1990|A$ következik; végül a

$9A - 1990d = 1$ egyenlet megoldása $A = 1769$, $d = 8$.

Könnyen látható, hogy a talált megoldások egyikére sem teljesül (2). Ne feledjük, hogy csupán a durvább (5) alapján kaptuk őket! Így valóban nem létezik a mondott tulajdonságú tört.

Megjegyzések. 1. A feladat szövegben lényeges, hogy az egyforma jegyeket a tizedesvessző után követeljük meg. Például a

$$88 + \frac{1769}{1990} = 88,8889\dots$$

szám tizedeltört alakjában található 5 szomszédos egyforma számjegy.

2. Tetszőleges négy jegyből álló D jegycsoport pontosan akkor fordul elő egy 1990 nevezőjű tört tizedesjegyei között, ha valamilyen A -val teljesül (3). Látható, hogy a 10^4 darab négyjegyű csoportból pontosan 1990 található meg valamilyen 1990 nevezőjű tört tizedesjegyei között. Ugyanez a helyzet az öt- vagy annál több jegyből álló csoportok esetén is. Ami a 3-jegyű csoportokat illeti, ezek közül viszont már mindegyik előfordul, hiszen ekkor a (3)-nak megfelelő

$$(3') \quad 1,99(D+1) > A \geq 1,99D$$

feltétel minden D -re teljesül valamilyen A egész számmal. A kapott intervallum hossza ugyanis 1-nél nagyobb $(1,99)$, így az mindig tartalmaz egész számot – általában kettőt is.