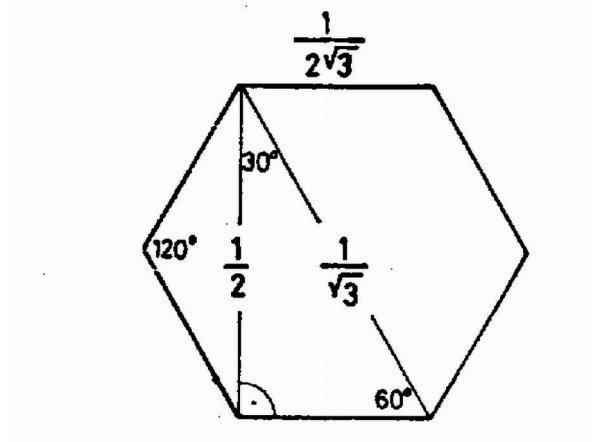
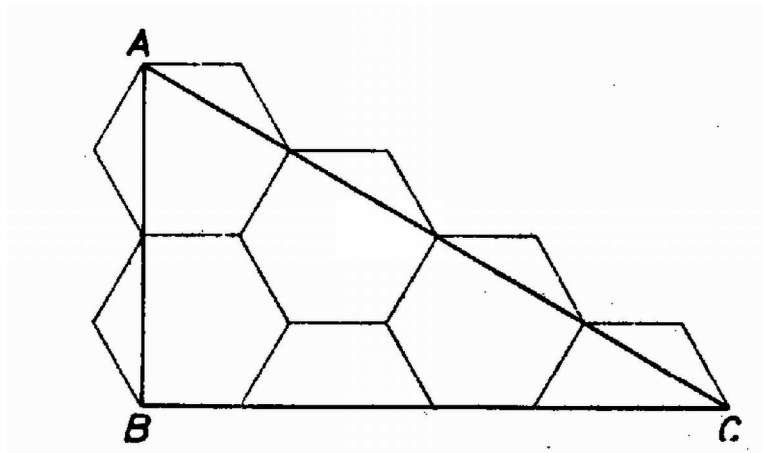


Megmutatjuk, hogy a feladat állítása 20 pont helyett már 17 pontra is igaz.



1. ábra

Tudjuk, hogy a síkot egybevágó szabályos hatszögekkel hézagtalanul le lehet fedni. Készítsünk egy ilyen lefedést $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ oldalú szabályos hatszögekkel (egy ilyen hatszög méretei az 1. ábrán láthatók), majd a szereplő hatszögek közül válasszunk ki hatot a 2. ábrán látható módon. A , B és C legyen a kiválasztott hatszögeknek az ábrán látható három csúcsa.



2. ábra

A szabályos hatszögek elemi tulajdonságaiból következik, hogy az AB , BC és CA szakaszok a hatszögek csúcsai közül – A -t, B -t és C -t leszámítva – még rendre egyet, hármat, hármat tartalmaznak, továbbá

$$AB = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad BC = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \quad \text{és} \quad CA = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Tehát ABC egybevágó a feladatban szereplő háromszöggel, így lefedhető a 2. ábrán látható módon 4 hatszöggel és 2 fél-hatszöggel.

Ha az adott pontok közül valamelyik hatszögben 4 vagy annál több van, akkor rajzoljuk meg a hatszög köré írható kört (ennek sugara $\frac{1}{2\sqrt{3}}$), majd ennek a körnek a 4 pont egyikén átmenő átmérőjét. Az így keletkező két zárt félkörlemez mindegyike tartalmazza a kiválasztott pontot, ezen kívül a két félkör együttesen még legalább 3 pontot tartalmaz az adott pontok közül, ezért valamelyikük legalább $1 + 2 = 3$ adott pontot tartalmaz. Ha a hatszögek mindegyikében legfeljebb csak 3, a fél-hatszögek – amelyek nyilván lefedhetők egy $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ sugarú zárt félkörlemezzel – mindegyikében pedig legfeljebb 2 adott pont lenne, akkor az összes pontok száma nem lehetne több, mint $4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 16$. De nekünk 17 pontunk van, ezért vagy valamelyik hatszögben van legalább 4, vagy valamelyik fél-hatszögben legalább 3 pont, azaz mindig kiválasztható a pontok közül 3, amelyek lefedhetők egy $1/\sqrt{3}$ átmérőjű zárt félkörlemezzel.