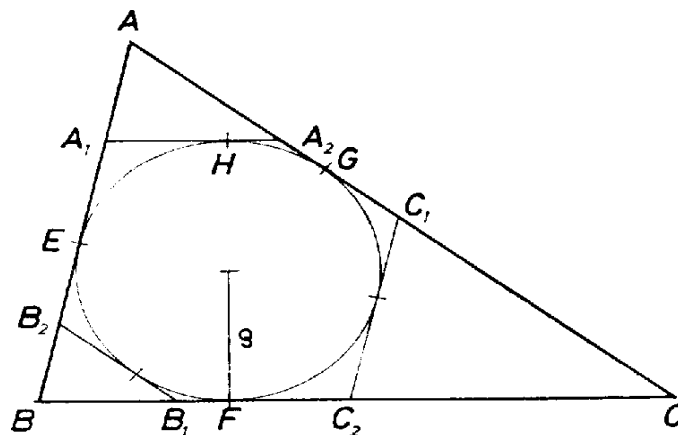


I. megoldás. Legyenek az ABC háromszög beírt körének az oldalakon lévő érintési pontjai E , F és G , a levágott kis háromszögek AA_1A_2 , BB_1B_2 és CC_1C_2 ; az A_1A_2 és a beírt kör érintési pontja pedig H (1. ábra). Jelöljük a kis háromszögek területét rendre k_A , k_B , k_C -vel, az ABC háromszög területét pedig k -val.



1. ábra

Mivel egy körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőek, ezért $k_A = AA_1 + AA_2 + A_1H + A_2H = AA_1 + A_1E + AA_2 + A_2G = AE + AG$. Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy $k_B = BE + BF$ és $k_C = CG + CF$. Ezeket összeadva kapjuk, hogy $k_A + k_B + k_C = k$. Másrészt az oldalak párhuzamossága miatt a levágott kis háromszögek hasonlóak az ABC háromszöghöz, ezért a háromszögek beírt körének és területének aránya mind a négy háromszög esetén ugyanaz a t valós szám:

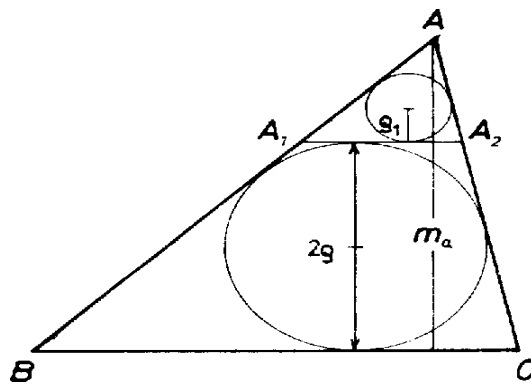
$$\frac{\varrho}{k} = \frac{\varrho_1}{k_A} = \frac{\varrho_2}{k_B} = \frac{\varrho_3}{k_C} = t.$$

Ezeket felhasználva:

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = tk_A + tk_B + tk_C = t(k_A + k_B + k_C) = tk = \varrho;$$

ami éppen a bizonyítandó összefüggés.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, továbbá jelöljük az ABC háromszög magasságait rendre m_a , m_b , m_c -vel. Az AA_1A_2 háromszög A -hoz tartozó magassága ekkor $m_a - 2\varrho$ (lásd a 2. ábrát).



2. ábra

Az AA_1A_2 háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, ezért:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{m_a - 2\varrho}{m_a}.$$

Ugyanígy láthatjuk be, hogy:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho} = \frac{m_b - 2\varrho}{m_b} \quad \text{és} \quad \frac{\varrho_3}{\varrho} = \frac{m_c - 2\varrho}{m_c}.$$

Ezekből:

$$(1) \quad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \varrho \left(3 - \frac{2\varrho}{m_a} - \frac{2\varrho}{m_b} - \frac{2\varrho}{m_c} \right).$$

Tehát elegendő megmutatnunk, hogy $\frac{2\varrho}{m_a} + \frac{2\varrho}{m_b} + \frac{2\varrho}{m_c} = 2$. Ha az ABC háromszög területét T jelöli, akkor az ismert területképletek alapján:

$$2T = k\varrho = a \cdot m_a = b \cdot m_b = c \cdot m_c,$$

vagyis:

$$\frac{\varrho}{m_a} + \frac{\varrho}{m_b} + \frac{\varrho}{m_c} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k} = \frac{a+b+c}{k} = 1.$$

Tehát (1)ből következik, hogy $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \varrho(3 - 2) = \varrho$.

Olaszi Zsolt (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján