

**I. megoldás.** Jelölje az  $x$ ,  $\frac{1}{y}$ ,  $y + \frac{1}{x}$  mennyiségek legkisebbikét  $m(x, y)$ . Ekkor

$$\begin{aligned} (1) \quad & 0 < m(x, y) \leq x; \\ (2) \quad & 0 < m(x, y) \leq \frac{1}{y}; \\ (3) \quad & 0 < m(x, y) \leq y + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

(1)-ből és (2) -ből kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{m(x, y)}, \quad \text{illetve} \quad y \leq \frac{1}{m(x, y)},$$

ezért

$$y + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{m(x, y)}.$$

Ezt (3)-mal egybevetve

$$m(x, y) \leq \frac{2}{m(x, y)},$$

ahonnan  $m(x, y) > 0$  miatt  $m(x, y) \leq \sqrt{2}$  adódik. Az  $x$ ;  $\frac{1}{y}$ ;  $y + \frac{1}{x}$  értékek legkisebbike tehát nem lehet  $\sqrt{2}$ -nél nagyobb. Egyenlőség lehetséges, amennyiben (1), (2), (3)-ban egyidejűleg egyenlőség áll, azaz  $x = \frac{1}{y} = \sqrt{2}$ . Ekkor  $y + \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$  és így a keresett érték a  $\sqrt{2}$ .

*Dombi Gergely* (Pécs, JPTE I. sz. Gyak. Ált. Isk., 7. o. t.)

**II. megoldás.** Az  $u = \frac{1}{y}$  jelöléssel az  $\left(x, u, \frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right)$  mennyiségek minimumát keressük. Jelöljük általában az  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  számok minimumát  $m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ -nel.

Ekkor nyilván

$$m\left(x, u, \frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right) = m\left(m(x, u); \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Két pozitív szám kisebbike nem lehet nagyobb, mint az ismert módokon képezett középértékeik. Vegyük először a harmonikus közepüket:

$$m(x, u) \leq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{u}}, \quad \text{tehát}$$

$$m\left(x, u, \frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right) \leq m\left(\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{u}}, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Ezután azt használjuk ki, hogy két pozitív szám minimuma nem nagyobb a mértani közepükénél; így

$$m\left(x, u, \frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right) \leq m\left(\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{u}}, \frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right) \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{u}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right)} = \sqrt{2}.$$

Tehát

$$m\left(x, u, \frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right) \leq \sqrt{2},$$

és pontosan akkor van egyenlőség, ha  $x = u = \frac{1}{x} + \frac{1}{u}$ , azaz  $x = u = \sqrt{2}$ .

*Megjegyzés.* Mindkét megoldás gondolatmenetével igazolható, hogy ha a  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tetszőleges pozitív számok, akkor az  $x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$  számok minimuma nem lehet nagyobb, mint  $\sqrt{n}$  és pontosan akkor ennyi, ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt{n}$ .

Hasonlóan igazolható, hogy a pozitív  $x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$  számok legnagyobbika legalább  $\sqrt{n}$ .