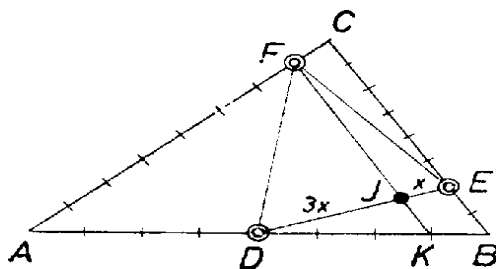
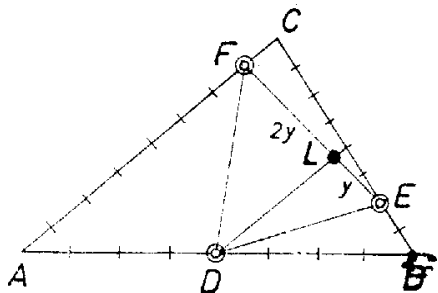


I. megoldás. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük az AB oldal felezőpontját D -vel, a BC oldal B -hez közelebbi negyedelőpontját E -vel, a CA oldal C -hez közelebbi nyolcadoló pontját pedig F -fel. Rajzoljunk F -en át párhuzamost a BC oldallal. Messe ez a DE szakaszt J -ben, az AB oldalt pedig K -ban (1. ábra).

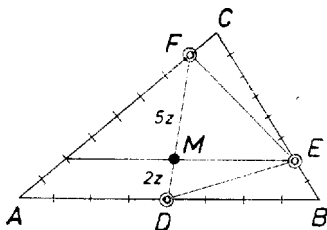


1. ábra

Mivel $CB \parallel FK$, ezért a párhuzamos szelők tétele szerint $AK : KB = AF : FC = 7 : 1$, tehát K nyolcadolópontja az AB oldalnak, D ugyanennek az oldalnak a felezőpontja, ezért $DK : KB = 3 : 1$. A párhuzamos szelők tételét az EDB szögére alkalmazva kapjuk, hogy $DJ : JE = DK : KB = 3 : 1$. Tehát az F ponton át a BC oldallal húzott párhuzamos a DE szakaszt 3:1 arányban osztja. Teljesen hasonló módon láthatjuk be, hogy a D ponton át AC -vel húzott párhuzamos az EF szakaszt 1:2 arányban (2. ábra), az E ponton át AB -vel húzott párhuzamos az FD szakaszt pedig 5:2 arányban osztja (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

Ezek alapján a szerkesztést a következőképpen végezhetjük el:

A DE , EF és FD szakaszokon megszerkesztjük azokat a J , L , M pontokat, melyekre $DJ : JE = 3 : 1$, $EL : LF = 1 : 2$ és $FM : MD = 5 : 2$. Ezután FJ -vel E -n át, DL -el F -en át, EM -mel pedig D -n át párhuzamost húzunk. Ez a három párhuzamos a szerkesztendő háromszög három oldalegyenese.

Könnyen belátható – a párhuzamos szelők tételének többszöri alkalmazásával –, hogy az így szerkesztett háromszögben a D , E , F pontok valóban felező-, negyedelő-, illetve nyolcadoló pontok. Ha a D , E , F pontok egy egyenesbe esnek, akkor a feladatnak nincs megoldása, minden más esetben egy megoldás van.

Illés Mariann (Tata, Eötvös J. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A feladatot a következő, általánosabb formában oldjuk meg:

Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adottak oldalegyenesein azok a D , E , F pontok, melyekre $AD : DB = 1 : \alpha$, $BE : EC = 1 : \beta$ és $CF : FA = 1 : \gamma$, ahol α , β és γ adott racionális számok.

Indítsunk a sík egy tetszőleges O pontjából helyvektorokat a szereplő pontokhoz, és jelöljük ezeket a megfelelő kisbetűvel. Ekkor az arányosan osztó pont helyvektorára vonatkozó ismert szabály alapján felírhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \frac{\alpha \mathbf{a} + \mathbf{b}}{1 + \alpha}, \\ \mathbf{e} &= \frac{\beta \mathbf{b} + \mathbf{c}}{1 + \beta}, \\ \mathbf{f} &= \frac{\gamma \mathbf{c} + \mathbf{a}}{1 + \gamma}.\end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ -re megoldva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{1}{1 + \alpha\beta\gamma}(\beta\gamma(1 + \alpha)\mathbf{d} - \gamma(1 + \beta)\mathbf{e} + (1 + \gamma)\mathbf{f}), \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{1 + \alpha\beta\gamma}((1 + \alpha)\mathbf{d} + \alpha\gamma(1 + \beta)\mathbf{e} - \alpha(1 + \gamma)\mathbf{f}), \\ \mathbf{c} &= \frac{1}{1 + \alpha\beta\gamma}(-\beta(1 + \alpha)\mathbf{d} + (1 + \beta)\mathbf{e} + \alpha\beta(1 + \gamma)\mathbf{f}).\end{aligned}$$

A szerkesztést úgy végezzük, hogy a $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ vektorok ismeretében megszerkesztjük az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokat, s ezeknek a végpontjai adják a háromszög csúcspontjait. (Eredeti feladatunkban $\alpha = 1$, $\beta = 3$ és $\gamma = 7$.)

A diszkusszió az általános esetben valamivel bonyolultabb. Ha a D , E , F pontok nincsenek egy egyenesen és $\alpha\beta\gamma \neq -1$, akkor egy megoldás van. Ha a D , E , F pontok egy egyenesen vannak és $\alpha\beta\gamma = -1$, akkor végtelen sok megoldás van, más esetben pedig nincs megoldás. (Ennek bizonyítását az érdeklődő olvasó Menelaosz tételének felhasználásával végezheti el.)

Megjegyzés: Természetesen az első megoldás módszerével is megoldható az általános feladat, ennek végiggondolását is az olvasóra bízuk.