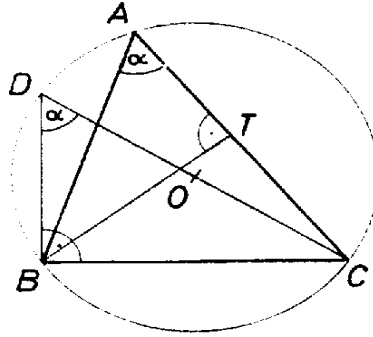


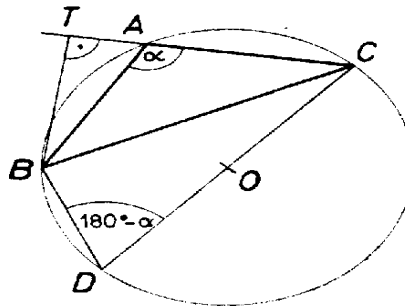
Először bebizonyítunk egy, a háromszög köré írt kör sugarára vonatkozó összefüggést:

(*) *Tetszőleges háromszög köré írt körének sugarát megkaphatjuk úgy, hogy a háromszög két oldalának szorzatát elosztjuk a harmadik oldalhoz tartozó magasság kétszeresével.*

Jelöljük az ABC háromszög szögeit és oldalait a szokásos módon. Legyen a köré írt kör középpontja O , sugara R , az OC egyenes és a köré írt kör másik metszéspontja D , a B csúshoz tartozó magasság talppontja T , a magasságszakasz hossza pedig m_b . Azt kell megmutatnunk, hogy $R = \frac{ac}{2m_b}$. Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor $c = m_b$, az állítás nyilvánvaló. Ha $\alpha \neq 90^\circ$, akkor a BDC és a TAB háromszögek hasonlóak, mert $\angle DBC = \angle BTA = 90^\circ$, valamint a kerületi szögek tétele miatt $\angle BDC = \angle BAT$. Ha $\alpha < 90^\circ$, akkor mindkét szög a körülírt kör BC ívéhez tartozó kerületi szög (1/a ábra), ha pedig $\alpha > 90^\circ$, akkor mindkét szög 180° -ra egészíti ki α -t (1/b ábra).



1/a ábra

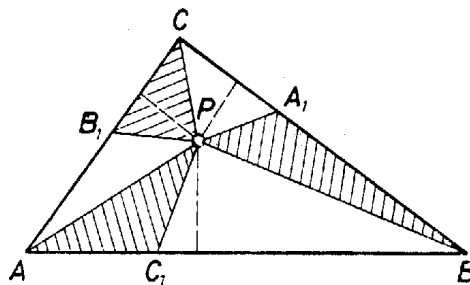


1/b ábra

Ezért a két háromszögben a megfelelő oldalak aránya is megegyezik, vagyis $\frac{BC}{DC} = \frac{BT}{BA}$, azaz $\frac{a}{2R} = \frac{m_b}{c}$; rendezve:

$$R = \frac{a \cdot c}{2m_b}.$$

Térjünk vissza eredeti feladatunkra. Jelöljük a P pontnak a BC , CA illetve az AB oldalaktól való távolságát rendre d_a , d_b , d_c -vel.



Alkalmazzuk a (*) állítást az AC_1P háromszögre. E háromszög AC_1 oldalához tartozó magassága d_c , tehát a háromszög köré írható kör R_1 sugarára: $R_1 = \frac{AP \cdot PC_1}{2d_c}$. Ugyanez a d_c magasság megtalálható a C_1BP háromszögben

is, így e háromszög köré írható kör R_2 sugarára: $R_2 = \frac{PC_1 \cdot BP}{2d_c}$. Ugyanígy kifejezve a többi szereplő háromszög köré írt kör sugarát, bizonyítandó állításunk a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} & \frac{AP \cdot PC_1}{2d_c} \cdot \frac{BP \cdot PA_1}{2d_a} \cdot \frac{CP \cdot PB_1}{2d_b} = \\ & = \frac{PC_1 \cdot BP}{2d_c} \cdot \frac{PA_1 \cdot CP}{2d_a} \cdot \frac{PB_1 \cdot AP}{2d_b}. \end{aligned}$$

Ez viszont nyilvánvaló azonosság.

Megjegyzések. **1.** Teljesen hasonló módon látható be a feladat következő általánosítása: Legyen P az $A_1A_2 \dots A_n$ konvex n -szög tetszőleges belső pontja, $B_1, B_2, \dots, B_n$ pedig rendre az $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ oldalak egy belső pontja. Ekkor az $A_1PB_1, A_2PB_2, \dots, A_nPB_n$ háromszögek köré írt körök sugarainak szorzata megegyezik a $B_1PA_2, B_2PA_3, \dots, B_nPA_1$ háromszögek köré írt körök sugarainak szorzatával.

Kassai Lóránt (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

2. A (*) állítást sokan a szinusztétel segítségével bizonyították a következőképpen: A tétel szerint $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$. A törtet bővítve: $R = \frac{abc}{2bc \sin \alpha} = \frac{abc}{4T} =$
 $= \frac{abc}{2b \cdot m_b} = \frac{ac}{2m_b}$ (T a háromszög területe).