

A megoldásban csak a pozitív osztókat vizsgáljuk. Jelöljük  $d(n)$ -nel a pozitív egész  $n$  szám osztóinak a számát, és tegyük fel, hogy a pozitív  $n$  és  $m$  számokra

$$(1) \quad \Pi(n) = \Pi(m).$$

Ha  $n$  és  $m$  közül az egyik 1, akkor  $\Pi(1) = 1$  miatt és az (1) feltételből  $\Pi(n) = 1 = \Pi(m)$ , azaz  $n = 1 = m$ , hiszen  $\Pi(t) = 1$  esetén ( $t$  pozitív egész)  $t$ -nek nem lehet 1-nél nagyobb osztója, tehát  $t \leq 1$ ,  $t = 1$ . Ennek alapján a bizonyításban a továbbiakban szorítkozhatunk az  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$  esetre. Legyenek az  $n$  osztói az  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, d(n)$ ) számok, ekkor

$$(2) \quad \Pi(n) = a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{d(n)}.$$

Mivel az  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, d(n)$ ) számok páronként különbözőek, osztói az  $n$ -nek, és számuk  $d(n)$ , ezért az  $\frac{n}{a_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, d(n)$ ) számok is páronként különbözőek, osztói az  $n$ -nek  $\left(n : \frac{n}{a_i} = a_i\right)$  és számuk  $d(n)$ . Így az  $\frac{n}{a_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, d(n)$ ) alakú számok is az  $n$  osztóinak egy felsorolása, tehát

$$\Pi(n) = \frac{n}{a_1} \cdot \frac{n}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{a_{d(n)}} = \frac{n^{d(n)}}{a_1 a_2 \dots a_{d(n)}}.$$

Ezt (2)-vel megszorozva a  $[\Pi(n)]^2 = n^{d(n)}$  összefüggést kapjuk. Ugyanígy következik a  $[\Pi(m)]^2 = m^{d(m)}$  egyenlőség. Mivel (1)-ből  $[\Pi(n)]^2 = [\Pi(m)]^2$  adódik, ezért fennáll, hogy

$$(3) \quad n^{d(n)} = m^{d(m)}.$$

Legyen  $n$  és  $m$  prímtényezős felbontása

$$(4) \quad \begin{aligned} n &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \quad \text{és} \\ m &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}, \quad \text{ahol} \quad \alpha_i \quad \text{és} \quad \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) \end{aligned}$$

nemnegatív egészek. Mivel  $n$  és  $m$  közül egyiknek sincs kitüntetett szerepe, ezért feltehetjük, hogy  $m \geq n$ . Bevezetve a  $\gamma = \frac{d(m)}{d(n)}$  jelölést, (3)-ból

$$(5) \quad n = m^\gamma$$

következik, amit az előzővel egybevetve  $m \geq m^\gamma$ , azaz – felhasználva az  $x \mapsto m^x$  függvény szigorúan monoton növekvő voltát

$$(6) \quad 1 \geq \gamma.$$

A (3) feltételből (4) alapján

$$p_1^{\alpha_1 d(n)} p_2^{\alpha_2 d(n)} \dots p_r^{\alpha_r d(n)} = p_1^{\beta_1 d(m)} p_2^{\beta_2 d(m)} \dots p_r^{\beta_r d(m)},$$

a számelmélet alaptétele szerint ez azt jelenti, hogy  $\alpha_i d(n) = \beta_i d(m)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), azaz  $0 \leq \alpha_i = \beta_i \gamma$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), ebből pedig (6) miatt  $0 \leq \alpha_i \leq \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ); tehát fennáll, hogy  $0 < \alpha_i + 1 \leq \beta_i + 1$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Ezeket az egyenlőtlenségeket összeszorozva

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1) \leq (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \dots (\beta_r + 1)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek bal oldalán viszont  $d(n)$ , jobb oldalán pedig  $d(m)$  áll, ezért  $\gamma = \frac{d(m)}{d(n)} \geq 1$ . Ezt (6)-tel egybevetve  $\gamma = 1$ , és így (5)-ből valóban  $n = m$  adódik.

*Megjegyzés.* A megoldásban felhasználtuk a

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1),$$

összefüggést, amelyet a következőképpen láthatunk be. Az  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$  számnak pontosan azok a  $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_r^{x_r}$  alakú számok az osztói, amelyekre  $x_i = 0, 1, \dots, \alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Ilyen számokból egyrészt  $d(n)$  van, másrészt éppen  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$  hiszen az  $x_1, x_2, \dots, x_r$  számok egymástól függetlenek, lehetséges értékeik száma pedig rendre  $\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_r + 1$ .