

Jelöljük az adott háromszög csúcsait és oldalait a szokásos módon A, B, C , illetve a, b, c -vel. Az A -ból induló belső, illetve külső szögfelezőnek a BC egyenessel való metszéspontja legyen F_A , illetve G_A . Az $F_A G_A$ szakaszra mint átmérőre rajzolt kör legyen k_A . Hasonló módon kapjuk a k_B és k_C köröket.

Ismeretes (lásd pl.: Geometriai feladatok gyűjteménye I.), hogy k_A a B és C pontokhoz és a $\frac{c}{b}$ arányhoz tartozó Apollóniusz-kör, vagyis azoknak a P pontoknak a mértani helye, amelyekre $\frac{PB}{PC} = \frac{c}{b}$. Hasonlóan a k_B , illetve a k_C azon Q , illetve R pontok mértani helyei, melyekre $\frac{QC}{QA} = \frac{a}{c}$, illetve $\frac{RA}{RB} = \frac{b}{a}$.

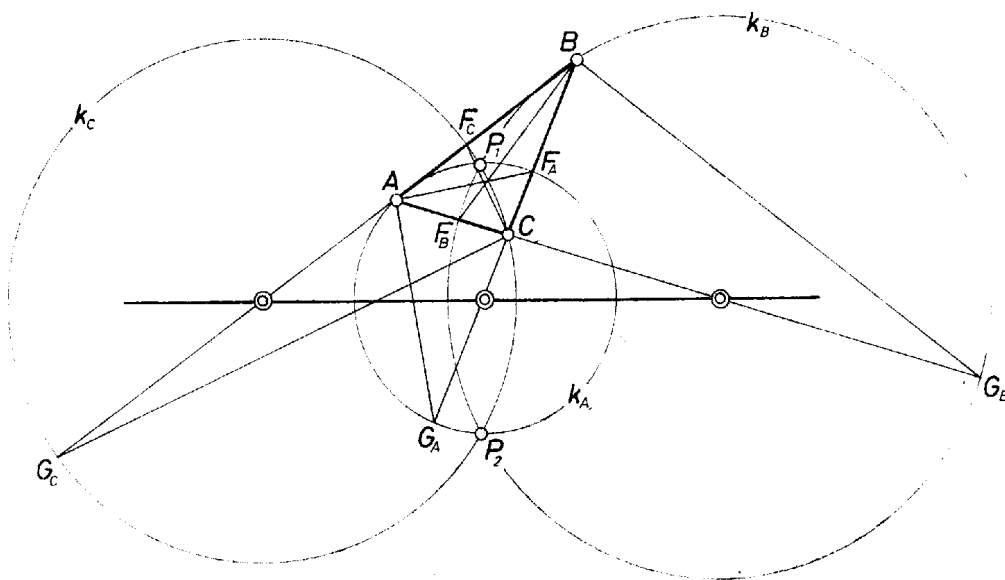
Tekintsük a k_A és k_B körök P_1 és P_2 metszéspontjait, (Később megmutatjuk, hogy ez a két metszéspont mindig létezik.) Ezekre:

$$\frac{P_1 B}{P_1 C} = \frac{c}{b} \quad \text{és} \quad \frac{P_1 C}{P_1 A} = \frac{a}{c}.$$

Tehát

$$\frac{P_i B}{P_i A} = \frac{a}{b} \quad (i = 1, 2),$$

vagyis ez a két pont rajta van k_C -n is. Tehát a $P_1 P_2$ szakasz mind a három körnek húrja. Ez azt jelenti, hogy a $P_1 P_2$ szakasz felező merőlegesén mind a három körnek a középpontja rajta van. E három középpont pedig éppen a feladatunkban szereplő három pont.



Azt kell még megmutatnunk, hogy a három kör közül valamelyik kettő metszi egymást. Feltehetjük, hogy β a háromszög legkisebb szöge. Ekkor G_A a BC oldal C -n túli, G_C pedig a BA oldal A -n túli meghosszabbításán van, vagyis C az $F_A G_A$, A pedig az $F_C G_C$ átmérőn. Tehát C (a k_C körvonal egyik pontja) belső pontja k_A -nak. A (a k_A egyik pontja) pedig belső pontja k_C -nek. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy a k_A és k_C körök metszik egymást.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Nagy Judit (Miskolc, Földes F. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján