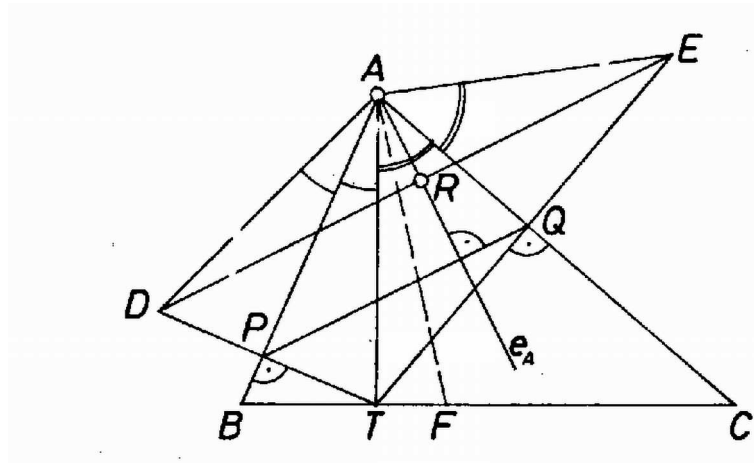


Megmutatjuk, hogy az e_A, e_B, e_C egyenesek mindegyike átmegy az ABC háromszög köré írható kör O középpontján. Elegendő belátnunk, hogy az e_A egyenes átmegy az O ponton, a másik két egyenesre a bizonyítás hasonlóan végezhető el.

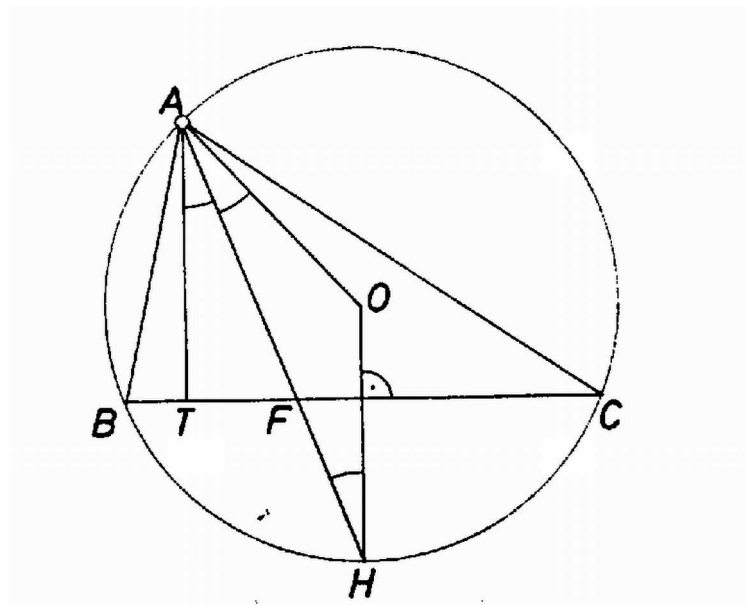


1. ábra

Jelöljük az A -ból induló magasság talppontját T -vel, az A csúshoz tartozó belső szögfelező és BC metszéspontját F -fel. Először azt bizonyítjuk be, hogy az e_A egyenes megegyezik az AT egyenes AF -re vonatkozó tükörképével. Jelöljük a T pont P -re, illetve Q -ra vonatkozó tükörképét D -vel, illetve E -vel. e_A és DE metszéspontját pedig R -rel (1. ábra). Azt kell belátnunk, hogy $\angle TAR = 2\angle TAF$. A PQ szakasz középvonala a TDE háromszögben, ezért DE párhuzamos PQ -val, vagyis e_A DE -re is merőleges. Az AT szakasz AB -re vonatkozó tükörképe AD , AC -re vonatkozó tükörképe pedig AE , ezért az ADE háromszögben $AD = AE$. Továbbá $\angle DAE = \angle DAT + \angle TAE = 2\angle BAT + 2\angle TAC = 2\angle BAC$. Tudjuk, hogy AR merőleges DE -re, ezért AR felezi az ADE egyenlő szárú háromszög A -nál levő szögét, vagyis $\angle DAR = \frac{1}{2}\angle DAE = \angle BAC = 2\angle BAF$. Ezeket az összefüggéseket felhasználva:

$$\begin{aligned} \angle TAR &= \angle DAR - \angle DAT = 2\angle BAF - 2\angle BAT = 2(\angle BAF - \angle BAT) = \\ &= 2\angle TAF. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy az e_A egyenes valóban az A -hoz tartozó magasságvonalnak az A -hoz tartozó belső szögfelezőre vonatkozó tükörképe. Most bebizonyítjuk, hogy ez a tükörkép mindig átmegy az O ponton.



2. ábra

Ismert (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I.*, 968. feladat), hogy az AF egyenes és a BC oldal felező merőlegese ugyanabban az M pontban metszi a háromszög köré írt (O középpontú) kört – M a BC ív felezőpontja (2. ábra). Az OA és az OM szakaszok a köré írt kör sugarai, ezért az OAM háromszög egyenlő szárú, tehát $\angle OAM =$

$\angle OMA$. Másrészt AT is és OM is merőleges a BC oldalra, ezért a $\angle TAM$ és az $\angle OMA$ váltószögek. Így $\angle OAM = \angle TAM$, tehát AT -nek AM -re vonatkozó tükörképe átmegy O -n.

Ujváry–Menyhárt Zoltán (Budapest, Fazekas M. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján.