

$$(1) \quad x^5 + 5x^3y + 5x^2y^2 + 5xy^3 + y^5 = 1.$$

I. megoldás. Jelölje a feladatban szereplő kétváltozós függvényt $f(x, y)$. Könnyen látható, hogy

$$f(x, y) = x^5 + y^5 + \frac{(x+y)^5 - x^5 - y^5}{x+y}.$$

Innen leolvasható, hogy ha $x+y=1$, akkor az (1) egyenlőség teljesül. Megmutatjuk, hogy $x+y>0$ és $f(x, y)=1$ esetén sem $x+y>1$, sem pedig $x+y<1$ nem lehetséges.

Mivel $x+y>0$, azért $x^5+y^5>0$, így ha $x+y>1$, akkor

$$\frac{x^5+y^5}{x+y} < x^5+y^5.$$

Tehát

$$1 = f(x, y) = x^5 + y^5 + (x+y)^4 - \frac{x^5+y^5}{x+y} > x^5 + y^5 + (x+y)^4 - (x^5+y^5),$$

azaz

$$1 > (x+y)^4,$$

ami nem lehet, hiszen $x+y>1$.

Hasonlóan az $1 < (x+y)^4$ ellentmondásra vezet a $0 < x+y < 1$ feltevés is, tehát $x+y$ csak 1 lehet.

II. megoldás. Az I. megoldásban láttuk, hogy $x+y=1$ esetén valóban $f(x, y)=1$.

Megmutatjuk, hogy ez csak $x+y=1$ esetén lehetséges. Legyen $y>0$ rögzített. Ekkor

$$f(x, y) = x^5 + 5yx^3 + 5y^2x^2 + 5y^3x + y^5$$

pozitív x -ekre az x -nek szigorúan monoton növekvő páratlan polinomja, így minden függvényértéket pontosan egy helyen vesz föl. Mivel láttuk, hogy az $x=1-y$ helyen ($y<1$ -re) $f(x, y)=1$, ezért (1)-ből valóban $x+y=1$ következik, ha x és y pozitív.

Bánfalvi Koppány (Szentendre, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

III. megoldás. $f(x, y)$ -nak az első megoldásban felírt alakjából kiindulva szorozzuk meg az (1) egyenlőség mindkét oldalát $(x+y)$ -nal, és rendezzünk nullára. Így

$$(x+y)(x^5+y^5) + (x+y)^5 - (x^5+y^5) - (x+y) = 0.$$

Csoportosítás után szorzattá alakítva a bal oldalon

$$(x+y-1)(x^5+y^5) + (x+y)((x+y)^4-1) = 0$$

adódik. A második tag második tényezőjéből ugyancsak kiemelhető $x+y-1$, és így a következő alakot kapjuk:

$$(2) \quad (x+y-1)[x^5+y^5 + (x+y)^4 + (x+y)^3 + (x+y)^2 + x+y] = 0.$$

Látható, hogy ha $x+y>0$, akkor (2) második tényezője pozitív, így (1)-ből valóban $x+y=1$ következik.

Megjegyzés. Nem hagyható el a feladat feltételei közül az a követelmény, hogy x és y pozitívak (ill. az ennél gyengébb $x+y>0$ egyenlőtlenség). Rögzített y mellett ugyanis (2) második tényezője x -nek ötödfokú polinomja, amelynek létezik valós gyöke, és az többnyire nem $1-y$.