

I. megoldás. Tegyük fel, hogy van olyan A egész szám, melyre $\frac{A}{1989}$ tizedestört alakja négy darab szomszédos 9-es számjegyet tartalmaz valahol a tizedesvessző után. Ekkor egy alkalmas tízhatványra $\frac{10^k \cdot A}{1989}$ tizedestört alakjában közvetlenül a tizedesvessző után áll négy darab 9-es, e hányados törtrésze tehát legalább 0,9999. Ez azonban lehetetlen, hiszen egy egész számot 1989-cel osztva a hányados törtrésze legfeljebb $\frac{1988}{1989} < 0,9995$.

Megjegyzés. Az természetesen nem igaz, hogy $\frac{A}{1989}$ tizedestört alakjában egyáltalán nem fordulhat elő négy szomszédos 9-es. Ha például $A = 9 \cdot 1989 + 1988 = 19889$, akkor $\frac{A}{1989} = 9,9994972 \dots$

II. megoldás. Az $\frac{A}{1989}$ hányadosban a tizedesvessző utáni jegyeket úgy kapjuk, hogy az első osztási lépés R maradékának 10-szeresét maradékosan osztjuk 1989-cel.

Ha $10R = q \cdot 1989 + r$, ahol $0 \leq r < 1989$, akkor a hányados következő jegye q , az eljárást pedig az r maradékkal folytatjuk, ha az nem 0.

Ha, a hányados valamelyik jegye 9-es (azaz $q = 9$), akkor $R < 1989$ miatt a fenti összefüggésből

$$r = 10R - 9 \cdot 1989 = 1989 - 10(1989 - R).$$

Ha k darab 9-est kapunk egymás után, akkor a k -adik lépés utáni r_k maradékra

$$0 \leq r_k = 1989 - 10^k(1989 - R) \leq 1989 - 10^k,$$

ami negatív, ha $10^k > 1989$. Így legfeljebb három egymás utáni lépésben kaphatjuk a 9-es számjegyet a hányadosban.

Megjegyzés. 1. Mindkét megoldás gondolatmenetével igazolható, hogy ha b egy n -jegyű szám, akkor tetszőleges pozitív egész a -ra a tizedesvessző után sehol nem állhat n darab szomszédos 9-es az $\frac{a}{b}$ hányados tizedestört alakjában.

2. Ismeretes, hogy a racionális számok tizedestört alakja periodikus, jegyeit pedig a II. megoldásban is használt jól ismert osztási eljárással kapjuk. A fentiekből következik, hogy ez az állítás ebben a formában nem fordítható meg: vannak olyan periodikus tizedestörtek, amelyek *nem kaphatók meg* osztási eljárással; éspedig pontosan azok, amelyekben a tizedesvessző után egy helytől kezdve csupa 9-es áll.