

Legyen $A = a_1^2 + 2a_2^2$, $B = b_1^2 + 2b_2^2$ két érdekes szám. Ekkor

$$\begin{aligned} AB &= a_1^2 b_1^2 + 2a_1^2 b_2^2 + 2a_2^2 b_1^2 + 4a_2^2 b_2^2 = \\ &= (a_1^2 b_1^2 + 4a_2^2 b_2^2) + 2(a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2). \end{aligned}$$

A két teljes négyzetből $4a_1 b_1 a_2 b_2$ „hiányzik”. Ezt az összeg első tagjához hozzáadva, a másodikból pedig kivonva az

$$AB = (a_1 b_1 + 2a_2 b_2)^2 + 2(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

felbontást kapjuk, tehát az AB szorzat is érdekes.

Megjegyzések: 1. Ha a „korrekció” $4a_1 b_1 a_2 b_2$ tagot más sorrendben adjuk hozzá és vonjuk ki, akkor az ugyancsak megfelelő

$$AB = (a_1 b_1 - 2a_2 b_2)^2 + 2(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2$$

felbontást kapjuk.

2. Az azonosság hátterére a komplex számok felhasználásával világíthatunk rá. Az

$$A = (a_1 + i\sqrt{2}a_2)(a_1 - i\sqrt{2}a_2)$$

és a

$$B = (b_1 + i\sqrt{2}b_2)(b_1 - i\sqrt{2}b_2)$$

felbontásból a szorzatban a tényezőket felcserélve

$$AB = [(a_1 + i\sqrt{2}a_2)(b_1 + i\sqrt{2}b_2)(a_1 - i\sqrt{2}a_2)(b_1 - i\sqrt{2}b_2)].$$

Az első tényező $(a_1 b_1 - 2a_2 b_2) + i\sqrt{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$, a második pedig ennek konjugáltja, $(a_1 b_1 - 2a_2 b_2) - i\sqrt{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$. A kettő szorzata tehát

$$(a_1 b_1 - 2a_2 b_2)^2 + 2(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$$

3. A talált azonosság nem csak az $x^2 + 2y^2$ alakú számok szorzatára igaz, hanem tetszőleges d valós számmal az $x^2 + dy^2$ alakú számokra is. Ennek következménye, hogy egész d -re az $x^2 + dy^2$ természetes számok szorzata is ilyen alakú.

Egy másik típusú általánosítása pedig az ún. Lagrange-féle azonosság:

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4)^2 \\ &+ (x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3)^2 + \\ &+ (x_1 y_3 - x_3 y_1 + x_4 y_2 - x_2 y_4)^2 + \\ &+ (x_1 y_4 - x_4 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2)^2. \end{aligned}$$

Az azonosság szerint négy négyzetszám összegeként előálló számok szorzata is ilyen alakú. A bizonyítás közvetlen számolással történhet, háttérben azonban a *kvaterniók* szerkezeti tulajdonságai állnak. A kvaterniókról olvashatunk lapunk 1986/8–9. számában. A Lagrange azonosság kulcsszerepet játszik annak a nevezetes tételnek a bizonyításában, mely szerint minden természetes szám felírható négy négyzetszám összegeként. Az azonosság miatt ugyanis elegendő ezt a tételt csupán prímeke igazolni.