

$$(1) \quad x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1.$$

I. megoldás. Mindkét oldalt $(x+1)^2$ -nel szorozva kapjuk, hogy

$$(2) \quad x^2(x+1)^2 + x^2 - (x+1)^2 = 0.$$

A bal oldalon az első két tag összege két négyzet különbsége:

$$x^2(x+1)^2 + x^2 = (x^2 + x + 1)^2 - (x+1)^2,$$

és így (2) az

$$(x^2 + x + 1)^2 - 2(x+1)^2 = 0$$

alakot ölti. Két négyzet különbségként az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$(x^2 + x + 1)^2 - (\sqrt{2}(x+1))^2 = (x^2 + (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2}))(x^2 + (1 - \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})).$$

Az első tényező minden (valós) x -re pozitív, a második gyökei pedig:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}.$$

Az értelmezési tartományon megfordítható lépéseket végeztünk, így a kapott számok (1)-nek is gyökei.

Csirik János (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Könnyen ellenőrizhető, hogy egyenletünk bal oldala

$$x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + 2\frac{x^2}{x+1},$$

így az egyenlet az

$$\left(\left(\frac{x^2}{x+1}\right) + 2\frac{x^2}{x+1} + 1\right) - 2 = \left(\frac{x^2}{x+1} + 1\right)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$$

alakba írható.

Szorzattá alakítva:

$$\left(\frac{x^2}{x+1} + 1 - \sqrt{2}\right) \left(\frac{x^2}{x+1} + 1 + \sqrt{2}\right) = 0.$$

Az első tényezőtől az

$$x^2 + (1 - \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2}) = 0$$

egyenlet adódik. Ennek gyökei

$$\frac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}.$$

A második tényezőtől pedig nem kapunk valós gyököket.

Tokodi Tamás (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. A felírt egyenletből következik, hogy van olyan φ szög, amelyre $x = \sin \varphi$ és $\frac{x}{x+1} = \cos \varphi$. Ekkor φ -re

$$\frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \cos \varphi,$$

ahonnan

$$(3) \quad \sin \varphi \cos \varphi = \sin \varphi - \cos \varphi.$$

Négyzetre emelve, rendezés után $\sin \varphi \cdot \cos \varphi$ -re a

$$\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi - 1 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, ahonnan $\sin \varphi \cos \varphi = \sqrt{2} - 1$, a másik gyök abszolút értéke nagyobb mint 1.

Így (3) alapján a gyökök és együtthatók összefüggéséből $\sin \varphi$ és $(-\cos \varphi)$ gyökei a

$$t^2 - (\sqrt{2} - 1)t - (\sqrt{2} - 1) = 0$$

egyenletnek.

Innen $\sin \varphi$ - azaz x - lehetséges értékei:

$$\frac{\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a talált értékek megoldásai az eredeti egyenletnek.

Tokodi Tamás megoldása nyomán

IV. megoldás. Általában oldjuk meg az

$$x^2 + \left(\frac{ax}{x+a}\right)^2 = b^2$$

egyenletet. (A feladatban $a = b = 1$).

Vezessük be az $y = \frac{ax}{x+a}$ ismeretlent. Ekkor az

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & x^2 + y^2 = b^2, \\ \text{(ii)} \quad & a(x - y) = xy \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk.

Az $u = x + (-y)$, $v = x \cdot (-y)$ ismeretlenekre így az

$$\begin{aligned} u^2 - 2v &= b^2; \\ au &= -v \end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik, ahonnan u -ra az

$$(4) \quad u^2 + 2au - b^2 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

Ennek $u_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ gyökei valósak.

Az ezekkel képezett

$$(5) \quad t^2 - u_i t - au_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

egyenlet gyökei a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggések alapján x és $-y$.

Ezek szerint az egyenlet lehetséges megoldásai:

$$x = \frac{u_i \pm \sqrt{u_i^2 + 4au_i}}{2} = \frac{-a + e\sqrt{a^2 + b^2} + e\sqrt{-2a^2 + b^2 + 2ea\sqrt{a^2 + b^2}}}{2}$$

(az e értéke $+1$ vagy -1).

Ezek közül a valós értékek az eredeti egyenletnek is gyökei, hiszen ha $t = x$ -re teljesül (5), azaz

$$x^2 - ux - au = 0,$$

ahol u -ra teljesül (4), akkor (5)-ből

$$ax = x^2 - ux - au + ax = (x - u)(x + a),$$

innen

$$\frac{ax}{x+a} = x - u.$$

Ugyancsak (5)-ből

$$2au = 2x^2 - 2ux,$$

és ezt behelyettesítve (4)-be, valóban

$$b^2 = u^2 + 2au = u^2 + x^2 - 2ux + x^2 = (x - u)^2 + x^2 = \left(\frac{ax}{x+a}\right)^2 + x^2.$$