

I. megoldás. A megoldás során felhasználjuk azt a jólismert tényt, hogy egy racionális szám négyzete pontosan akkor egész, ha a szám is az: más szóval egy nem négyzetszám négyzetgyöke irracionális.

Ha x és y a két adott racionális szám, akkor a feltétel szerint $(x + y)$ és $4xy$ is egész számok, ezért

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

is az. Az idézett tétel szerint tehát $x - y$ is egész szám és így $(x + y) + (x - y) = 2x$, illetve $(x + y) - (x - y) = 2y$ is egész számok.

Ily módon x és y egy-egy egész szám fele. E két szám összege páros, szorzata pedig osztható 4-gyel. Így mindkét egész szám páros, ami azt jelenti, hogy x és y valóban egész számok.

Czirók András II. o. t. (Miskolc, Földes F. Gimn.)

II. megoldás. Legyen a két racionális szám x és y . Ekkor a feltétel szerint $A = x + y$ és $B = xy$ egész számok. Tekintsük a

$$t^2 - At + B = 0$$

egyenletet. Ennek éppen x és y a gyöke. Ismeretes, hogy egy egész együtthatós polinom racionális gyökeinek egyszerűsített alakjában a nevező osztója a legmagasabb fokú tagja együtthatójának. Ez azt jelenti, hogy ha egy egész együtthatós polinom legmagasabb fokú tagjának együtthatója 1, akkor a polinom racionális gyökei egész számok. Ez éppen a bizonyítandó állítást adja.