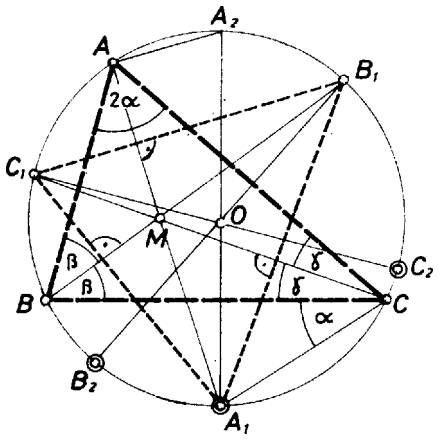
Tekintsük a feladatot megoldottnak. Az ABC háromszög szögei legyenek 2α, 2β és 2γ, a belső szögfelezőknek a háromszög köré írt körrel való metszéspontjait jelölje rendre A_1, B_1 és C_1, a külső szögfelezők és a kör metszéspontjai pedig A_2, B_2 és C_2.



Tudjuk, hogy egy háromszög egyik csúcsához tartozó külső és belső szögfelezők egymásra merőlegesek, azaz $A_1AA_2\sphericalangle = B_1BB_2\sphericalangle = C_1CC_2\sphericalangle = 90°$. Így – Thalész tétele szerint – A_1A_2, B_1B_2 és C_1C_2 a körülírt körnek átmérői. A kerületi szögek tétele alapján:

$$BCA_1\sphericalangle = BAA_1\sphericalangle = \alpha,$$
$$B_1A_1C\sphericalangle = B_1BC\sphericalangle = \beta.$$

Ezért a B_1A_1C és a C_1CA_1 $(= C_1CB + BCA_1)$ szögek összege $\beta + \gamma + \alpha = 90°$, azaz a CC_1 egyenes merőleges az A_1B_1 egyenesre. Ugyanígy láthatjuk be, hogy AA_1 és B_1C_1, valamint BB_1 és A_1C_1 is egymásra merőleges egyenesek, vagyis az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságvonalai megegyeznek az ABC háromszög belső szögfelezőivel.

Ezek alapján a szerkesztés már könnyen elvégezhető. Ha adottak pl. az A_1, B_2 és C_2 pontok, akkor megszerkesztjük a rajtuk átmenő kört. A B_2 és C_2 pontokat a kör középpontjára tükrözve megkapjuk B_1-et és C_1-et, végül az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságvonalai kimetszik a körből a keresett A, B, C pontokat. Az így szerkesztett háromszög az előzőekben leírtak alapján eleget is tesz a feltételeknek.

A feladatnak általában egy megoldása van. Nincs megoldás, ha az A_1, B_2, C_2 pontok egy egyenesre esnek, vagy ha az $A_1B_2C_2$ háromszög valamelyik szöge derékszög. Ez utóbbi esetben ugyanis az A_i, B_i, C_i pontok némelyike egybeesne, ami nem lehetséges.

Szabó Zsuzsanna (Mosonmagyaróvár, Haller J. Ált. Isk., 8. o. t.)
dolgozata alapján