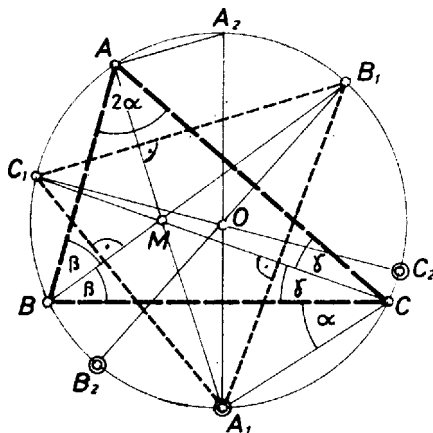


Tekintsük a feladatot megoldottnak. Az ABC háromszög szögei legyenek 2α , 2β és 2γ , a belső szögfelezőknek a háromszög köré írt körrel való metszéspontjait jelölje rendre A_1 , B_1 és C_1 , a külső szögfelezők és a kör metszéspontjai pedig A_2 , B_2 és C_2 .



Tudjuk, hogy egy háromszög egyik csúcsához tartozó külső és belső szögfelezők egymásra merőlegesek, azaz $A_1AA_2 \perp B_1BB_2 \perp C_1CC_2 \perp 90^\circ$. Így – Thalész tétele szerint – A_1A_2 , B_1B_2 és C_1C_2 a körülírt körnek átmérői. A kerületi szögek tétele alapján:

$$BCA_1 \sphericalangle = BAA_1 \sphericalangle = \alpha,$$

$$B_1A_1C \sphericalangle = B_1BC \sphericalangle = \beta.$$

Ezért a B_1A_1C és a C_1CA_1 ($= C_1CB + BCA_1$) szögek összege $\beta + \gamma + \alpha = 90^\circ$, azaz a CC_1 egyenes merőleges az A_1B_1 egyenesre. Ugyanígy láthatjuk be, hogy AA_1 és B_1C_1 , valamint BB_1 és A_1C_1 is egymásra merőleges egyenesek, vagyis az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságvonalai megegyeznek az ABC háromszög belső szögfelezőivel.

Ezek alapján a szerkesztés már könnyen elvégezhető. Ha adottak pl. az A_1 , B_2 és C_2 pontok, akkor megszerkesztjük a rajtuk átmenő kört. A B_2 és C_2 pontokat a kör középpontjára tükrözve megkapjuk B_1 -et és C_1 -et, végül az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságvonalai kimetszik a körből a keresett A , B , C pontokat. Az így szerkesztett háromszög az előzőekben leírtak alapján eleget is tesz a feltételeknek.

A feladatnak általában egy megoldása van. Nincs megoldás, ha az A_1 , B_2 , C_2 pontok egy egyenesre esnek, vagy ha az $A_1B_2C_2$ háromszög valamelyik szöge derékszög. Ez utóbbi esetben ugyanis az A_i , B_i , C_i pontok némelyike egybeesne, ami nem lehetséges.

Szabó Zsuzsanna (Mosonmagyaróvár, Haller J. Ált. Isk., 8. o. t.)
dolgozata alapján