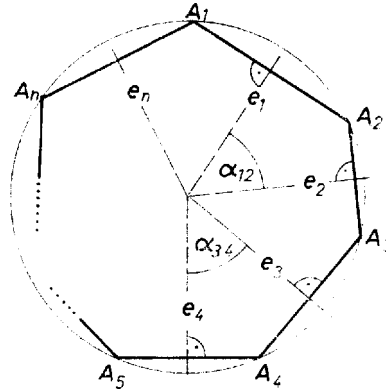
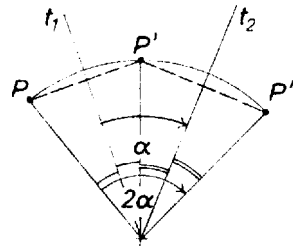


Tekintsük a feladatot megoldottnak. A sokszög minden csúcsa rajta van a körön, tehát a sokszög minden oldalának felező merőlegese átmegy a kör középpontján. Jelöljük ezeket a felező merőlegeseket rendre $e_1, e_2, \dots, e_n$ -nel. Ha a sokszögnek az 1. ábrán látható A_1 csúcsát e_1 -re tükrözzük, akkor az A_2 csúcsot kapjuk. Ezt tovább tükrözve e_2 -re A_3 -at kapjuk, és így tovább, A_i -t e_i -re tükrözve A_{i+1} -et kapjuk, míg végül e_n -re való tükrözés után visszakapjuk az A_1 pontot. Tehát az A_1 fixpontja annak a transzformációnak, amely az $e_1, e_2, \dots, e_n$ egyenesekre való tükrözések egymásutánjából áll. Vizsgáljuk meg, hogy ez a transzformáció milyen egyszerűbben leírható transzformációval helyettesíthető.



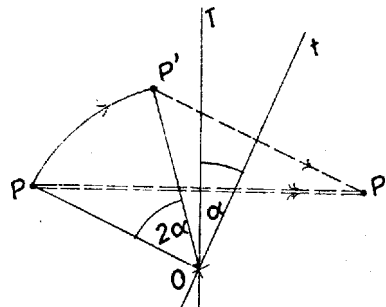
1. ábra

Ismert, hogy két egymást metsző tengelyre való tükrözés egymásutánja helyettesíthető egy, a tengelyek metszéspontja körüli elforgatással, melynek szöge éppen a tengelyek szögének a kétszerese (2. ábra).



2. ábra

Egy pont körüli elforgatás és egy, a ponton átmenő tengelyre való tükrözés egymásutánja pedig helyettesíthető egy olyan tengelyre való tükrözéssel, amelyik átmegy az adott ponton, és az eredeti tükrözés tengelyével feleakkora szöget zár be, mint az elforgatás szöge (3. ábra). (Ezeknek az állításoknak a bizonyítása megtalálható pl. *Reiman István: Fejezetek az elemi geometriából c. középiskolai tankönyvének* 33–34. oldalán.)



3. ábra

Jelöljük az e_i egyenesre való tükrözést T_i -vel, az adott kör O középpontja körüli α szögű elforgatást $F(\alpha)$ -val, az e_i és az e_j egyenesek szögét pedig α_{ij} -vel. Meg kell szerkesztenünk a $T_1, T_2, \dots, T_n = T$ transzformációnak az adott körvonalon levő fixpontjait.

Két esetet különböztetünk meg. Ha n páros, akkor

$$T = (T_1 \cdot T_2) \cdot (T_3 \cdot T_4) \cdot \dots \cdot (T_{n-1} \cdot T_n) = F(2\alpha_{12}) \cdot F(2\alpha_{34}) \cdot \dots \cdot F(2\alpha_{n-1,n}) = F(2(\alpha_{12} + \alpha_{34} + \dots + \alpha_{n-1,n})).$$

Ez egy O körüli elforgatás, aminek csak akkor van 0-tól különböző fixpontja, ha az elforgatás szöge 360° -nak egész számú többszöröse; akkor viszont minden pont fixpont.

Ha n páratlan, akkor

$$T = (T_1 \cdot T_2) \cdot (T_3 \cdot T_4) \cdot \dots \cdot (T_{n-2} \cdot T_{n-1}) \cdot T_n = F(2\alpha_{12}) \cdot F(2\alpha_{34}) \cdot \dots \cdot F(2\alpha_{n-2,n-1}) \cdot T_n = F(2(\alpha_{12} + \alpha_{34} + \dots + \alpha_{n-2,n-1})) \cdot T_n.$$

Ez egy tengelyes tükrözés, aminek a körvonalon két fixpontja van.

Ezek alapján a szerkesztés a következőképpen végezhető el: Az O pontból merőlegeseket állítunk az adott egyenesekre, ezek éppen az e_i egyenesek lesznek. Ezután megszerkesztjük a T transzformációnak a körvonalon levő fixpontjait. Ha n páros, akkor T egy O körüli elforgatás, tehát vagy nincs fixpontja, azaz a feladatnak nincs megoldása (ha $2(\alpha_{12} + \alpha_{34} + \dots + \alpha_{n-1,n}) \neq k \cdot 360^\circ$), vagy végtelen sok fixpontja van (ha $2(\alpha_{12} + \alpha_{34} + \dots + \alpha_{n-1,n}) = k \cdot 360^\circ$), és ilyenkor a feladatnak is végtelen sok megoldása van, hiszen a körvonal tetszőleges A_1 pontját sorban tükrözve az $e_1, e_2, \dots, e_n$ egyenesekre, a feltételeknek megfelelő (esetleg hurkolt) sokszöget kapunk. Ha n páratlan, akkor T egy tengelyes tükrözés, aminek a körön két fixpontja van; ekkor tehát két (O -ra tükrös helyzetű) megoldást kapunk úgy, hogy a fixpontot rendre tükrözzük az $e_1, e_2, \dots, e_n$ egyenesekre. Mivel az n darab egyenes sorrendje nem volt előírva, ezért a fenti eljárást az egyenesek minden lehetséges sorrendjében el kell végezni.

Nagy Judit (Miskolc, Földes F. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján