

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{1988}$$

Fejezzük ki az egyenletből az egyik ismeretlent – például y -t —

$$(2) \quad y = 1988 + \frac{1988 \cdot 1989}{x - 1988}.$$

Mivel y (és x) egész szám, ezért (2) jobb oldalán a második tag nevezője osztója a számlálónak. Azt állítjuk, hogy ez az osztó nem lehet negatív.

Ha ugyanis $(x - 1988)$ negatív, akkor $x \geq 0$ miatt $x - 1988 \leq -1$, és így (2)-ben a tört abszolút értéke legalább 1989. Másrészt a tört negatív, így $y < 0$; ezt azonban a feltétel kizárja. Ha tehát egy természetes számokból álló (x, y) számpár megoldása (1)-nek, akkor y – és persze x is — nagyobb, mint 1988.

Könnyen látható másrészt, hogy $A = 1988 \cdot 1989$ bármely pozitív d osztójára az $\left(1988 + d, 1988 + \frac{A}{d}\right)$ számpár megoldása (1)-nek, és különböző osztókra különböző megoldásokat kapunk. Következésképpen az (1) egyenletnek annyi megoldása van a természetes számok halmazán, ahány pozitív osztója van az

$$A = 1988 \cdot 1989 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 71$$

számnak.

Ismeretes, hogy ha egy B szám prímtényezős felbontása $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, akkor B -nek

$$d(B) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdot \dots \cdot (1 + \alpha_k)$$

darab pozitív osztója van. Esetünkben ez az érték

$$d(A) = (1 + 2)(1 + 2)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 144,$$

így az (1) egyenletnek 144 darab megoldása van a természetes számok halmazán.

Tisza Miklós (Miskolc, Földes F. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján