

Mivel $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ és $\frac{c}{a}$ is pozitív számok, a négyzetes és számtani közép vonatkozó egyenlőtlenség szerint

$$(1) \quad A = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \leq \sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}}{3}} = Q,$$

a négyzetes és a mértani közép vonatkozó egyenlőtlenség szerint pedig

$$(2) \quad 1 = \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}}{3}} = Q;$$

mindkét egyenlőtlenségben az egyenlőség feltétele $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, azaz $a = b = c$.

(1) és (2) jobb oldala egyaránt Q , ezért a bal oldalak G mértani közepe sem lehet Q -nál nagyobb :

$$G = \sqrt{1 \cdot A} \leq Q;$$

négyzetre emelve a bizonyítandó állítást kapjuk. Egyenlőség nyilván csak akkor teljesül, ha $a = b = c$, ellenkező esetben ugyanis

$$1 = G < A < Q.$$

Megjegyzés. Hasonlóan igazolható, hogy ha a pozitív $x_1, x_2 \dots x_k$ számok szorzata 1, akkor az

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n$$

összeg n -ben monoton nő, tehát ha $0 < n < m$ egész számok, akkor

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n \leq x_1^m + x_2^m + \dots + x_k^m,$$

és itt pontosan akkor áll egyenlőség, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 1$. Ennek bizonyításához az n -ed rendű hatványközepek hasonló jellegű monotonitását, tehát a $0 \leq n < m$ esetben teljesülő

$$(3) \quad A_n = \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n}{k}} \leq \sqrt[m]{\frac{x_1^m + x_2^m + \dots + x_k^m}{k}} = A_m$$

egyenlőtlenséget használjuk fel. A megoldáshoz hasonlóan most is felírjuk a mértani és számtani közép közötti

$$(4) \quad 1 = \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k} \leq A_1 \leq A_m$$

egyenlőtlenséget. Mivel m darab pozitív szám mértani közepe nem lehet nagyobb e számok maximumánál,

$$(5) \quad \sqrt[n]{1^{m-n} \cdot A_n^n} \leq \max(1, A_n) \leq A_m,$$

így

$$A_n^n \leq A_m^m,$$

ezt akartuk bizonyítani. Végül ha az x_1 számok között vannak különbözők, akkor a (3), (4), (5) egyenlőtlenségek egyikében sem állhat egyenlőség, így az valóban csak az $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 1$ esetben teljesül.