

I. megoldás. Az egyenlet bal oldala pozitív, így x és y egyike sem nulla. Mindkét oldalt $4xy$ -nal osztva az eredetivel ekvivalens

$$(1) \quad \left(4x + \frac{1}{4x}\right) \left(y + \frac{1}{y}\right) = 4$$

egyenlethez jutunk. Ismeretes, hogy minden a valós számra $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2$, és csak akkor van egyenlőség, ha $a = \pm 1$.

Eszerint (1) bal oldalán mindkét tényező abszolút értéke legalább 2, így az egyenlőséghez $|4x| = |y| = 1$ szükséges, valamint az, hogy (1) bal oldalán a két tényező előjele azonos legyen.

Innen két megoldás adódik: $4x = y = 1$ -ből $x = \frac{1}{4}$ és $y = 1$, $4x = y = -1$ -ből pedig $x = -\frac{1}{4}$ és $y = -1$. Látható, hogy mindkét számpár megoldása a feladatnak.

II. megoldás. Az egyenlet bal oldalán a beszorzást elvégezve, rendezés után írjuk fel a kapott kétváltozós polinomot x hatványai szerint:

$$(2) \quad 16(y^2 + 1)x^2 - 16yx + (y^2 + 1) = 0.$$

Mivel $16(y^2 + 1)$ pozitív, (2) bal oldala pontosan akkor nulla, ha

$$(3) \quad x^2 - \frac{y}{y^2 + 1}x + \frac{1}{16} = 0.$$

Adott y esetén tehát 0, 1 vagy 2 olyan x létezik, amelyre az (x, y) számpár megoldása az egyenletnek, attól függően, hogy a paraméteres (3) egyenlet $D(y)$ „diszkriminánsa” negatív, nulla vagy pozitív. $D(y)$ két négyzet különbségeként szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned} D(y) &= \left(\frac{y}{y^2 + 1}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(\frac{y}{y^2 + 1} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{y}{y^2 + 1} - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{2y + y^2 + 1}{2(y^2 + 1)} \cdot \frac{2y - (y^2 + 1)}{2(y^2 + 1)}, \end{aligned}$$

így

$$D(y) = \frac{(y + 1)^2}{2(y^2 + 1)} \cdot \left(-\frac{(y - 1)^2}{2(y^2 + 1)}\right) = -\left(\frac{y^2 - 1}{2(y^2 + 1)}\right)^2.$$

Azt kapjuk, hogy $D(y)$ egy teljes négyzet ellentettje, és így nem lehet pozitív. Az y -nak pontosan azokra az értékeire kapunk megoldást, amelyekre $D(y) = 0$, azaz

$$\frac{y^2 - 1}{2(y^2 + 1)} = 0;$$

ez pontosan akkor teljesül, ha $y = \pm 1$. Ha $y = 1$, akkor (3) szerint

$$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 0, \quad x = \frac{1}{4},$$

míg $y = -1$ esetén

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \quad x = -\frac{1}{4}.$$

Az egyenletnek tehát két megoldása van: az $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ és a $\left(-\frac{1}{4}; -1\right)$ számpárok.

Megjegyzések. 1. Komplex számok felhasználásával (3) bal oldalát a következőképpen alakíthatjuk át:

Legyen $f(y) = \frac{y}{y^2 + 1}$, $g(y) = \frac{y^2 - 1}{2(y^2 + 1)}$; ekkor (3) pontosan akkor teljesül, ha

$$x_{1,2} = \frac{f(y) \pm \sqrt{-g^2(y)}}{2} = \frac{f(y) + ig(y)}{2} \quad \text{ahol } i^2 = -1.$$

Innen azt kapjuk, hogy (3) bal oldala az alábbi „gyöktényező” alakba írható:

$$\left(x - \frac{f(y) + ig(y)}{2}\right) \left(x - \frac{f(y) - ig(y)}{2}\right).$$

A beszorzást elvégezve kapjuk, hogy

$$x^2 - f(y)x + \frac{f^2(y)}{4} + \frac{g^2(y)}{2} = \left(x - \frac{f(y)}{2}\right)^2 + \left(\frac{g(y)}{2}\right)^2,$$

azaz (3) bal oldala két négyzet összege:

$$\left(x - \frac{y}{2(y^2+1)}\right)^2 + \left(\frac{y^2-1}{4(y^2+1)}\right)^2.$$

2. A (2) kétváltozós polinom másképpen is felbontható két négyzet összegére; könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(16x^2 + 1)(y^2 + 1) - 16xy = (4xy - 1)^2 + (4x - y)^2.$$

Ebből az alakból ugyancsak eljuthatunk a megoldáshoz, hiszen két valós szám négyzetének összege pontosan akkor nulla, ha mind a két szám nulla.