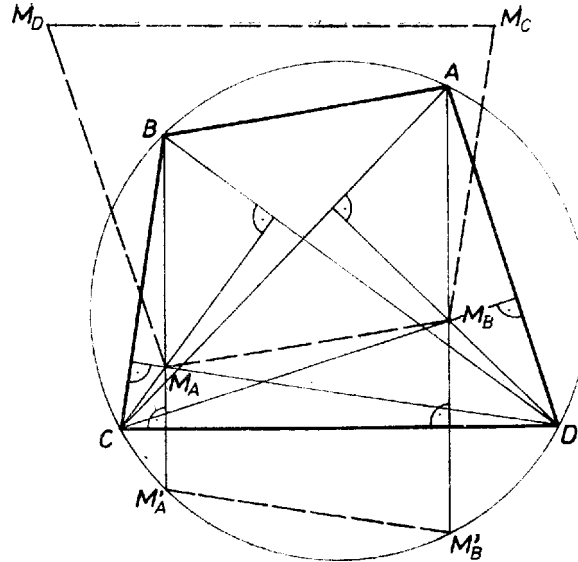


I. megoldás. Elegendő megmutatnunk, hogy a két négyszög megfelelő oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak. Ez pontosan akkor teljesül, ha az ABM_AM_B , BCM_BM_C , CDM_CM_D és DAM_DM_A négyszögek paralelogrammák. A bizonyítást az 1. ábrán látható ABM_AM_B négyszögre végezzük el, a többi négyszögre is lényegében ugyanaz a bizonyítás.



1. ábra

A BM_A és az AM_B egyenesek párhuzamosak, mert mindkettő merőleges a CD egyenesre – mint a BCD , ill. ACD háromszög CD oldalához tartozó magassága. Tükrözzük az M_A és M_B pontokat a CD oldalra. Ismert, hogy az így kapott M'_A és M'_B tükörképek rajta vannak a BCD , illetve az ACD háromszög köré írt körön, ami esetünkben megegyezik a húrnégyszög köré írt körrel. Ezért a $BM'_AM'_BA$ négyszög húrnégyszög. Viszont a BM_A és az $M_AM'_A$ egyenesek egyaránt merőlegesek CD -re, ezért a BM'_A egyenes is merőleges CD -re, tehát a $BM'_AM'_BA$ húrnégyszög két szemközti oldala párhuzamos, vagyis a négyszög szimmetrikus trapéz. Ha viszont egy szimmetrikus trapéz egyik szárát egy, az alapokra merőleges egyenesre tükrözzük, akkor a tükörkép párhuzamos a másik szárral. Ezért az M_AM_B egyenes mint az $M'_AM'_B$ szár CD -re vonatkozó tükörképe – párhuzamos az AB egyenessel. Vagyis az ABM_AM_B négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, tehát a négyszög paralelogramma.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

II. megoldás. Legyenek a húrnégyszög köré írt kör O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, a magasságpontokba mutató vektorok pedig $\mathbf{m}_a$, $\mathbf{m}_b$, $\mathbf{m}_c$, $\mathbf{m}_d$. Ismeretes (l. pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye* I., 3053. feladat) – hogy minden háromszögben a körülírt kör középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege megegyezik a középpontból a magasságpontokba mutató vektorral. Esetünkben négy háromszögnek közös a körülírt köre, ezért:

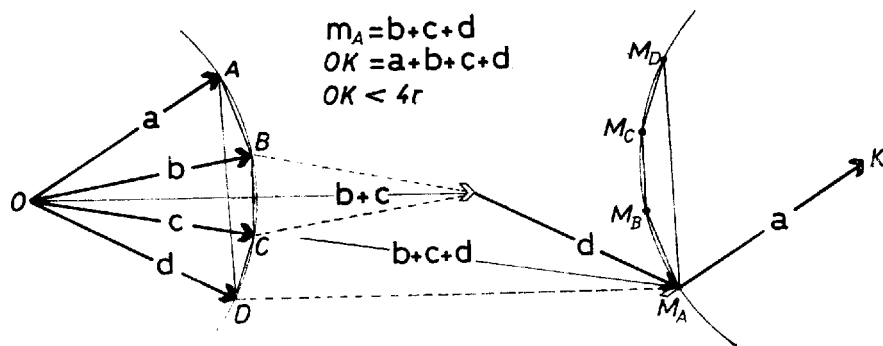
$$\mathbf{m}_a = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}; \quad \mathbf{m}_b = \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}; \quad \mathbf{m}_c = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}; \quad \mathbf{m}_d = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Az eredeti négyszög oldalvektorai:

$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{DC} = \mathbf{c} - \mathbf{d} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a}.$$

A magasságpontok által meghatározott négyszög oldalvektorai:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_AM_B} &= \mathbf{m}_b - \mathbf{m}_a = (\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) - (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{BA}, \\ \overrightarrow{M_BM_C} &= \mathbf{m}_c - \mathbf{m}_b = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}) - (\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{b} - \mathbf{c} = \overrightarrow{CB}, \\ \overrightarrow{M_CM_D} &= \mathbf{m}_d - \mathbf{m}_c = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}) = \mathbf{c} - \mathbf{d} = \overrightarrow{DC}, \\ \overrightarrow{M_DM_A} &= \mathbf{m}_a - \mathbf{m}_d = (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{d} - \mathbf{a} = \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$



2. ábra

Tehát a húrnégyszög oldalvektoraival rendre megegyeznek a magasságpontok által alkotott négyszög oldalvektoraival. Ebből pedig következik, hogy a két négyszög egybevágó.

Várady Péter (Győr, Révai M. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján