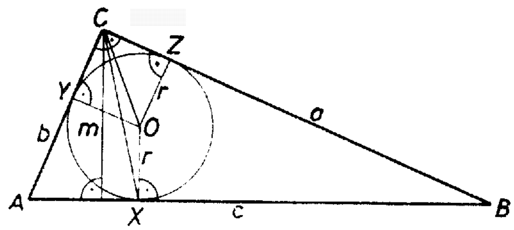
I. megoldás. Legyen az ABC derékszögű háromszög beírt körének középpontja O, a beírt körnek az oldalakon levő érintési pontjai pedig X, Y és Z (1. ábra).



1. ábra

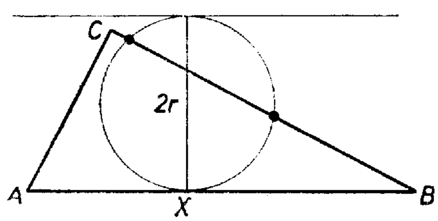
Ekkor a $CYOZ$ négyszögben $OY = OZ = r$, továbbá $YCZ\sphericalangle = CZO\sphericalangle = CYO\sphericalangle = 90^\circ$ (a két utóbbi szög a kör érintőjének az érintési pontba húzott sugárral bezárt szöge), tehát a $CYOZ$ négyszög négyzet. Ezért $CO = r\sqrt{2}$. A CX távolság legalább akkora, mint az ABC háromszög C csúcshoz tartozó magassága, azaz m. Másrészt a COX (esetleg elfajuló) háromszögben a háromszög–egyenlőtlenség szerint:

$$m \leqq CX \leqq CO + OX = r\sqrt{2} + r.$$

Ezt rendezve :

$$\frac{r}{m} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1 > 0{,}4.$$

Ezzel a bizonyítandó állítás egyik felét beláttuk.



2. ábra

Tegyük fel, hogy van olyan háromszög, amelyben – a bizonyítandó állítás második felével ellentétben – $r \geqq 0{,}5m$. Tekintsük a beírt körnek az AB oldallal párhuzamos másik érintőjét. Feltevésünk szerint a C csúcs az érintőegyenes és az AB oldal közti sávban helyezkedik el (2. ábra). Feltehetjük, hogy a C pont az AB szakaszra X-ben emelt merőlegesnek például a B-t nem tartalmazó oldalán van. Ekkor viszont a CB szakasz nem érintheti a beírt kört, ami ellentmondás. Tehát hibás az eredeti feltevésünk, vagyis $\frac{r}{m} < 0{,}5$. (A bizonyítás második felében nem használtuk ki, hogy a C csúcsnál derékszög van, tehát tetszőleges háromszög tetszőleges magasságára igaz, hogy $\frac{r}{m} < 0{,}5$.)

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

II. megoldás. Az $\frac{r}{m}$ hányados értékét kifejezhetjük a háromszög oldalaival. Írjuk fel az ABC háromszög területét kétféleképpen – az 1. ábra jelöléseit használva – egyrészt úgy, mint az AOB, BOC és COA háromszögek területének összege, másrészt mint az AB oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatának fele:

$$T = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r = \frac{1}{2} \cdot c \cdot m;$$

ebből

$$\frac{r}{m} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Így a feladatot visszavezettük a derékszögű háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenségekre. Először azt mutatjuk meg, hogy $\frac{c}{a+b+c} < 0{,}5$. Ezt rendezve: $c < 0{,}5(a+b+c)$, azaz $0{,}5c < 0{,}5(a+b)$, ami valóban igaz a háromszög–egyenlőtlenség miatt. (Most sem használtuk ki, hogy az ABC háromszög derékszögű.)

A másik egyenlőtlenség helyett ezúttal is az erősebb $\sqrt{2} - 1 \leqq \frac{c}{a+b+c}$ egyenlőtlenséget bizonyítjuk. Azt kell megmutatnunk, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \leqq \frac{c}{a+b+c} = \frac{1}{\frac{a+b}{c}+1}.$$

Mivel pozitív számokról van szó, ezért ez ekvivalens a következővel:

$$\frac{a+b}{c}+1 \leqq \sqrt{2}+1, \quad \text{azaz} \quad a+b \leqq c \cdot \sqrt{2}.$$

Emeljük itt mindkét oldalt négyzetre (ez is ekvivalens átalakítás, hiszen a szóban forgó számok pozitívak). Pitagorasz tételét alkalmazva:

$$(a+b)^2 \leqq 2c^2 = 2a^2 + 2b^2,$$

azaz

$$0 \leqq a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2.$$

Ez valóban teljesül, s mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség is igaz.

Balogh József (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.) megoldása alapján

Megjegyzés. Belátható, hogy az $\frac{r}{m}$ hányados értéke 0,5-et tetszőlegesen megközelítheti, de soha nem éri el. Alulról viszont felveszi a $\sqrt{2}-1$ értéket, ha a derékszögű háromszög egyenlő szárú.