

**I. megoldás.** Legyen a megadott pont  $P$  és rajzoljuk meg a téglalap  $BD$  átlóját. Ez két egybevágó derékszögű háromszögre bontja a téglalapot, a kettő közül tekintsük azt, amelyik – esetleg a határán – tartalmazza a  $P$  pontot (1. ábra).

1988-12-452-1.eps

1. ábra

Nagyítsuk úgy az  $A$  csúcsú résztéglalapot az  $A$ -ból, hogy  $P$  rákerüljön a  $BD$  oldalra. Azt állítjuk, hogy az  $AP^*$  átlójú téglalap területe legfeljebb az  $ABD$  háromszög területének a fele; ebből következik, hogy a  $P$  csúcsú résztéglalap területe sem nagyobb  $1/4$ -nél.

Ez az állítás sokféleképpen igazolható. A  $P^*$ -ból induló oldalak két egymáshoz és  $ABD$ -hez hasonló derékszögű háromszöget vágnak le az  $ABD$  háromszögből. A  $P^*D = p$ ,  $P^*B = q$  jelöléssel a levágott háromszögek területének összege

$$\left(\frac{p}{p+q}\right)^2 \cdot t_{ABD} + \left(\frac{q}{p+q}\right)^2 \cdot t_{ABD}.$$

Ez az összeg pedig legalább  $\frac{t_{ABD}}{2}$ , hiszen a négyzetes és a számtani közép közti egyenlőség szerint

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{p}{p+q}\right)^2 + \left(\frac{q}{p+q}\right)^2}{2}} \geq \frac{\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Könnyen látható, hogy pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha  $P = P^*$  a  $DB$  átfogó felezőpontja.

Mucsi Zsuzsanna (Békéscsaba, Sebes Gy. Közg. Szki., II. o. t.)  
dolgozata alapján

*Megjegyzés.* A felhasznált segédétel következő állítása is igaz: ha egy háromszög a belsejében tartalmaz egy paralelogrammát, akkor a paralelogramma területe nem nagyobb a háromszög területének a felénél.

**II. megoldás.** A téglalap  $O$  középpontján átmenő, a téglalap oldalaival párhuzamos egyenesek négy egybevágó téglalapra osztják az  $ABCD$  téglalapot. Ha a  $P$  pontot az  $A$  vagy a  $C$  csúcsú résztéglalapban vesszük fel, akkor az állítás nyilván igaz, hiszen ekkor valamelyik  $P$  csúcsú résztéglalapot tartalmazza egy  $1/4$  területű téglalap.

1988-12-453-1.eps

2. ábra

Ha nem ez a helyzet, akkor tekintsük  $P$ -nek az  $O$ -ra vonatkozó  $P'$  tükörképét (2. ábra). A csúcsoknál négy kis egybevágó téglalap keletkezik, és így az  $A$  és a  $C$  csúcsú résztéglalapok két-két példánya éppen lefedi azt a „keresztet”, amely úgy jön létre, hogy az  $ABCD$  téglalaphoz kivágjuk a vele közös centrumú,  $PP'$  átlójú téglalapot. Így a két terület kétszeresének összege kisebb, mint az  $ABCD$  téglalap területe, legalább az egyikük tehát  $1/4$ -nél kisebb területű.

*Megjegyzések:* 1. Mindkét megoldásból kiderül, hogy a két szóban forgó terület csak úgy lehet  $1/4$ , ha a  $P$  pontot a téglalap középpontjában vesszük fel.

2. Nem igaz, hogy a két terület között van olyan is, amelyik legalább  $1/4$ ; mindkét terület lehet  $1/4$ -nél kisebb. Ez pontosan akkor teljesül, ha a  $P$  pont a 3. ábrán bevonalkázott tartomány belsejében van. Ezt a tartományt két egybevágó hiperbolaív határolja, melyek a téglalap középpontjában érintik egymást, aszimptotáik a téglalap  $A$ , ill.  $C$  csúcsából induló oldalegyenesei, és az oldalakat az  $A$ , illetve  $C$  csúcsoktól távolabbi negyedelő pontokban metszik. A feladat állítása egyébként e hiperbolák közvetlen vizsgálatával is igazolható.

1988-12-454-1.eps

3. ábra