

A kockát hatszögben metsző síknak a kocka minden lapját metszenie kell. Ugyanakkor a sík egyik lapnak sem metszheti két átellenes élét, mivel akkor az adott laphoz a másik két élben csatlakozó lapok közül az egyiket nem metszené. A sík metszetvonala tehát minden lapon szomszédos éleket metsz. Így a kocka palástja kiteríthető az ábrán látható módon úgy, hogy a metszetvonalnak a P' és P'' pontok közti töröttvonal feleljen meg. Ez a töröttvonal nyilván akkor a legrövidebb, ha megegyezik a $P'P''$ szakasszal. Most már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy az ennek megfelelő hatszög síkhatszög-e.

1988-12-451-2.eps

1988-12-451-3.eps

Megmutatjuk, hogy ez a hatszög (a P pont helyzetétől függetlenül) valóban síkhatszög. A szerkesztésből következően a hatszög minden egyes oldala párhuzamos a kocka egy-egy lapátlójával (a kiterítésnél ugyanis a $P'P''$ egyenes minden éllel 45° -os szöget zár be); az ábra jelöléseit használva, az egyes élek rendre az AF , BG , FH , GD , HA és BD lapátlókkal párhuzamosak. Az AF , FH és HA , illetve a BG , GD és DB lapátlók két párhuzamos síkot határoznak meg, mégpedig olyan síkokat, amelyek merőlegesek a kocka CE testátlójára. (Ennek az ismert állításnak a bizonyítása megtalálható pl. a „Geometriai feladatok gyűjteménye I.” 1849. feladatának megoldásában.) Ily módon hatszögünk minden éle párhuzamos e két sík valamelyikével, ami csak úgy lehet, ha a hatszög síkhatszög, és síkja párhuzamos ezekkel a síkokkal. A hatszög síkja így szintén merőleges a CE testátlóra.

A minimális kerületű hatszögmetszetet tehát olyan sík adja, amely merőleges arra a testátlóra, amely az adott pontot tartalmazó lap ponttal szemközti élének egyik végpontjából indul ki.

Megjegyzés. Mivel a feltételeknek két testátló is megfelel, ezért minimális kerületű hatszög is kettő van. Az ábránkon láthatótól különbözőt akkor kapjuk, ha a P pontból nem a BF , hanem az AE él felé indulunk el.