

Megmutatjuk, hogy $m \leq 4$. Tudjuk, hogy minden szabályos sokszög körbe írható. Tekintsük az n -szög és az m -szögek köré írható köröket. Az m -szögeknek a k -szög csúcsaitól különböző csúcsai rajta vannak az n -szög köré írt körön, és rajta vannak valamelyik m -szög köré írt körön is. E körök nyilván különbözőek, így legfeljebb két közös pontjuk van. Az m -szögeknek ezért legfeljebb két olyan csúcsuk van, ami a k -szögnek nem csúcsa, azaz $m \leq 4$.

1988-12-448-1.eps

1. ábra

Ha $m = 3$, akkor nyilván $n = k$. Ekkor a k -szög középpontja körüli $\frac{360^\circ}{k}$ szögű elforgatás az alakzatot önmagába viszi, így az szabályos (1. ábra); tehát k tetszőleges (2-nél nagyobb egész szám) lehet.

1988-12-449-1.eps

2. ábra

$m = 4$ esetén legyen E , F és G a k -szög egymás utáni csúcsa, A , B , C , D pedig az EF és FG oldalak fölé szerkesztett négyzetek további csúcsai (2. ábra). Az n -szög csak akkor lehet szabályos, ha $AB = BC = CD$. De $AB = BF$ és $CD = CF$, így BFC egyenlőoldalú háromszög. Ennek alapján kiszámíthatjuk a k -szög egyik szögét: $EFG \sphericalangle = 360^\circ - (EFB \sphericalangle + BFC \sphericalangle + CFG \sphericalangle) = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 120^\circ$; tehát a k -szög csak hatszög lehet. Ha pedig egy szabályos hatszög oldalaira kifelé négyzeteket írunk, akkor a négyzeteknek a hatszög csúcsaitól különböző csúcsai egy olyan tizenkétyszöget alkotnak, amelynek minden oldala egyenlő, és minden szöge 150° -os (3. ábra), ezért ez a tizenkétyszög valóban szabályos.

1988-12-449-2.eps

3. ábra

A k , m , n számok lehetséges értékei tehát : $m = 3$ és $n = k$, ahol k tetszőleges 2-nél nagyobb szám, vagy $m = 4$, $k = 6$ és $n = 12$.

Keresztély Tibor (Budapest, Árpád Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján