

A két háromszög egybevágóságából nem következik, hogy az ABC háromszög szabályos. Ennek bizonyításához elegendő megadnunk egy olyan nem szabályos ABC háromszöget, amely egybevágó a feladat eljárása során kapott $A'B'C'$ háromszöggel.

1988-09-260-1.eps

1. ábra

Válasszuk az ABC háromszög csúcsait egy szabályos hatszög csúcsai közül az 1. ábrán látható módon. Az ABC háromszögben tehát A -nál 90° -os, B -nél 60° -os, C -nél pedig 30° -os szög van. Jelöljük a hatszög további csúcsait K , L és M -mel. Ekkor az $ABKLCM$ hatszög szabályosságából következik, hogy:

- (1) – a BC szakasz f_A felező merőlegese az AM és a KL szakaszoknak is felező merőlegese;
- (2) – a CA szakasz f_B felező merőleges átmegy a K és a M pontokon és merőlegesen felezi a BL szakaszt;
- (3) – az AB szakasz f_C felező merőlegese egybeesik a CL szakasz felező merőlegesével.

Ezeket felhasználva könnyen kapjuk az A' , B' , C' pontokat. A -nak f_A -ra vonatkozó tükörképe (1) miatt M , M -nek f_B -re vonatkozó tükörképe pedig (2) miatt önmaga, tehát $A' \equiv M$. B -nek f_B -re vonatkozó tükörképe (2) miatt L , amit f_C -re tükrözve (3) miatt C -t kapjuk, így $B' \equiv C$. Végül C -t f_C -re tükrözve (3) alapján L -t kapjuk, L -nek f_A -ra való tükrözésekor pedig (1) miatt K -t, azaz $C' \equiv K$. Esetünkben tehát az $A'B'C'$ háromszög éppen az MCK háromszög, ez pedig a hatszög szabályos volta miatt valóban egybevágó az ABC háromszöggel.

Tokodi Tamás (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ismeretes, hogy ha a t_1 egyenest a φ szögű forgatás viszi a t_2 egyenesbe, akkor a t_1 -re majd a t_2 -re vonatkozó tengelyes tükrözés egy forgatással helyettesíthető. A forgatás középpontja a tengelyek metszéspontja, szöge pedig 2φ .

A feladatban szereplő tükrözések tengelyei átmennek az ABC háromszög körülírt körének O középpontján, így az A' , B' , C' pontokat az A , B , C pontok O körüli elforgatottjaiként kapjuk.

1988-09-261-1.eps

2. ábra

Betűzzük a háromszög csúcsait pozitív körüljárás szerint (2. ábra). Ekkor f_A -t az f_B -be az O körüli $-\gamma$ szögű elforgatás viszi, így A' az A -nak O körüli -2γ szögű elforgatottja, $AOA' \sphericalangle = -2\gamma$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $BOB' \sphericalangle = -2\alpha$ és $COC' \sphericalangle = -2\beta$.

A középponti és kerületi szögek tétele szerint $AOB \sphericalangle = 2ACB \sphericalangle = 2\gamma$, és hasonlóan $BOC \sphericalangle = 2\alpha$, illetve $COA \sphericalangle = 2\beta$.

Ezután

$$A'OB' \sphericalangle = A'OA \sphericalangle + AOB \sphericalangle + BOB' \sphericalangle = 2\gamma + 2\gamma - 2\alpha = 4\gamma - 2\alpha,$$

és hasonlóan

$$B'OC' \sphericalangle = 4\alpha - 2\beta \quad \text{és}$$

$$C'OA' \sphericalangle = 4\beta - 2\gamma.$$

Mármint a két háromszög akkor és csak akkor egybevágó, ha a 2α , 2β , 2γ középponti szögekhez tartozó BC , CA , AB húrok valamilyen sorrendben egyenlők a $4\gamma - 2\alpha$, $4\alpha - 2\beta$ és a $4\beta - 2\gamma$ középponti szögekhez tartozó $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ húrokkal. Két középponti szöghöz adott körben pontosan akkor tartoznak egyenlő húrok, ha a két szög összege vagy különbsége a 2π egész számú többszöröse. Ez igen sok lehetőséget jelent; a megoldásban adott ellenpélda $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{6}\right)$ az

$$A'OB' \sphericalangle + AOB \sphericalangle = 0,$$

$$B'OC' \sphericalangle + COA \sphericalangle = 2\pi,$$

$$C'OA' \sphericalangle + BOC \sphericalangle = 2\pi$$

feltételekből kapható.

2. A megadott példában a két háromszög az $A \rightarrow B'$, $B \rightarrow A'$, $C \rightarrow C'$ megfeleltetés révén volt egybevágó. Mint a 3. ábra szabályos 13-szögében láthatjuk, még abban az esetben sem következik a két háromszög egybevágóságából az ABC háromszög szabályos volta, ha az egybevágóság során az A -nak A' , B -nek B' , C -nek pedig C' felel meg. Látható, hogy a két háromszög tükrös a CC' felező merőlegesére.

$$\alpha = \frac{9\pi}{13}, \quad \beta = \frac{\pi}{13}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{13},$$

$$AOA' \sphericalangle = -2\gamma = -\frac{6\pi}{13},$$

$$BOB' \sphericalangle = -2\alpha = -\frac{18\pi}{13},$$

$$COC' \sphericalangle = -2\beta = -\frac{2\pi}{13}.$$

Ha viszont még azt is megköveteljük, hogy a két háromszög egyező körüljárású legyen, tehát egyetlen O körüli forgatás vigye az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe – ez teljesül a megoldásban mutatott ellenpéldán, de ott az azonos betűjelű csúcsok nem egymásnak felelnek meg – akkor ezekből már valóban következik, hogy az ABC háromszög szabályos.