

Válasszuk a kör sugarát egységnyiinek, és legyen a szóban forgó $BDFH$ téglalap oldalainak hossza $2a$, illetve $2b$ ($0 < a, b < 2$). A téglalap területe ekkor $4ab$. Ha O a kör középpontja, akkor a nyolcszög területe az $OFGH$, $OHAB$, $OBCD$ és $ODEF$ deltoidok területének összege.

1988-05-213-1.eps

Egy deltoid területe az átlói szorzatának a fele, a fenti deltoidok területe így rendre $\frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 1$; $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 1$; $\frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 1$; $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 1$, és ebből a nyolcszög területe $2a + 2b$. A két idom területének aránya tehát

$$\frac{2a + 2b}{4ab} = \frac{a + b}{2ab}.$$

Mivel a és b pozitív, az $\frac{a + b}{2ab}$ kifejezés akkor minimális, amikor reciproka, $\frac{2ab}{a + b}$ maximális. Ez utóbbi éppen az a és b számok harmonikus közepe, ami nem lehet nagyobb a két szám négyzetes közepénél, $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ -nél, és egyenlő is csak akkor lehet vele, ha $a = b$. Miután esetünkben Pitagorasz tétele szerint $a^2 + b^2 = 1^2 = 1$,

$$\frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Így $\frac{2ab}{a + b}$ akkor maximális, ha $a = b$, és ekkor értéke $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért a nyolcszög és a téglalap területének aránya akkor minimális, ha $a = b$, vagyis ha a téglalap négyzet (a nyolcszög pedig szabályos), s a minimum értéke $\sqrt{2}$.

Megjegyzés. Az olvasó könnyen igazolhatja a pozitív a és b számok harmonikus, mértani, számtani és négyzetes közepére vonatkozó egyenlőtlenség-sorozatot:

$$\frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Egyenlőség minden esetben csak akkor van, ha $a = b$.