

I. megoldás. Balázs kitalálhatja Anna számait egyetlen kérdéssel, ha

$$B(x, y) = (x + y)(x + y + 1) - y = (x + y)^2 + x$$

értékét kérdezi meg.

Mivel x és y természetes számok, ezért

$$(1) \quad (x + y)^2 \leq B(x, y) < (x + y + 1)^2,$$

és így Anna számai összegének a négyzete a $B(x, y)$ -nál nem nagyobb négyzetszámok legnagyobbika, azaz

$$x + y = \lceil \sqrt{B(x, y)} \rceil.$$

Anna válasza alapján tehát Balázs először kiszámolhatja a két szám összegét, majd ennek négyzetét $B(x, y)$ -ből kivonva x értékét, végül y -t is.

Megjegyzések 1. A feladat szövegezésekor elég szerencsétlen módon kíséreltük meg kizárni, hogy a gondolt számok hatványkitevőként is előforduljanak. Ezt megengedve ugyanis pl. a $2^x \cdot 3^y$ értékéből az egyértelmű prímfelbontás miatt x és y megkapható. A hatványozás korlátozása valójában csupán erre a lehetőségre vonatkozott volna, de a „fürdővízzel együtt a gyereket is kiöntöttük” – emiatt volt szükség az $(x + y)^2$ „kerülő úton” való felírására. Ez nem tartozik a feladat lényegéhez, és emiatt olvasóink elnézését kérjük.

2. A fentieket szem előtt tartva Balázs akkor is boldogulhat egyetlen kérdéssel, ha Anna n darab számra gondolt. Ha ezek a számok $x_1, x_2, \dots, x_n$, akkor a

$$B_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)^n + (x_1 + \dots + x_{n-1})^{n-1} + \dots + (x_1 + x_2)^2 + x_1$$

formula megfelelő. Fennáll ugyanis – és a binomiális tétel felhasználásával könnyen igazolható – az (1)-hez hasonló

$$(2) \quad (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n \leq B_n(x_1, x_2, \dots, x_n) < (x_1 + \dots + x_n + 1)^n$$

egyenlőtlenség, és így a közölt megoldáshoz hasonlóan Balázs rendre kiszámolhatja az

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n, \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}, \\ & \vdots \\ & x_1 + x_2, \\ & x_1 \end{aligned}$$

mennyiségeket, és így magukat a gondolt számokat is.

3. A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy egy z változó n -edik hatványa kifejezhető olyan formulával is, amelyik nem tartalmaz hatványozást. Egy lehetőség például a

$$z^n = ((z - 1) + 1) \cdot ((z - 2) + 2) \cdot \dots \cdot ((z - n) + n)$$

azonosság kifejtett alakjából nyerhető.

II. megoldás. Ahhoz, hogy megoldja a feladatot, Balázs formulájának olyan kétváltozós $f(x, y)$ függvénynek kell lennie, amelyik különböző számpárokhoz különböző egész számokat rendel, tehát kölcsönösen egyértelműen képezi le a természetes számokból készíthető rendezett párok halmazát az egész számok halmazába. Ismeretes, hogy ilyen függvény létezik, ezzel azonban Balázs még nincsen kisegítve, neki ugyanis formulával kell egy ilyen függvényt megadnia, másfelől a függvényérték alapján rá kell találnia a gondolt számpárra, vagyis használnia kell az f függvény inverzét.

Az alábbi táblázat egy ilyen $f(x, y)$ elkészítését szemlélteti.

1988-04-169-1.eps

A táblázat $(n + 1)$ -edik átlójában az olyan rendezett számpárokhoz rendelt függvényértékek találhatók, amelyekben az elemek összege n . Azon rendezett számpárok száma, amelyekben az elemek összege kisebb, mint n , éppen $\binom{n+1}{2}$ – ennyiféleképpen választható ki az összeg és a számpár első eleme. Ha ezekhez a számpárokhoz már hozzárendeltük a $0, 1, \dots, \binom{n+1}{2} - 1$ számokat, akkor a

$$(0; n), (1; n - 1), \dots, (i; n - i), \dots, (n; 0)$$

számpárokhoz rendre az

$$\binom{n+1}{2}, \binom{n+1}{2} + 1, \dots, \binom{n+1}{2} + i, \dots, \binom{n+1}{2} + n = \binom{n+2}{2} - 1$$

számokat rendeljük. Így különböző párokhoz különböző számokat rendelünk, és Balázs megfelelő formulája

$$\binom{x+y+1}{2} + x.$$

Ez még tartalmaz 2-vel való osztást, de ennek kétszerese, $(x+y+1)(x+y)+2x$ megfelel a feltételeknek.

A helyettesítési értéket kettővel osztva a táblázat alapján Balázs rátalálhat Anna számaira.

Megjegyzések. 4. A fenti megoldásban lényegében azt láttuk be, hogy minden m természetes szám egyértelműen írható

$$m = \binom{a}{2} + \binom{b}{1}$$

alakban, ahol $a > b \geq 0$ $\left(\binom{1}{2} = \binom{0}{1} = 0\right)$. A megoldásban Balázs az $a = x + y + 1$, $b = x$ választással használja ezt az eredményt, pontosabban az ehhez a számpárhoz kiszámolt m értékből „keresi vissza” a és b értékét. Ehhez valójában nincs szüksége a táblázatra, hiszen adott m természetes számhoz kell kiszámolnia a nála nem nagyobb $\binom{a}{2}$ alakú számok legnagyobbikát, hasonlóan ahhoz, ahogyan az első megoldásban $m = a^2 + b$ értékéből ($a = x + y \geq x = b$) kellett meghatároznia az m -nél nem nagyobb négyzetszámok legnagyobbikát.

5. A második megoldás is általánosítható, igaz ugyanis – és például teljes indukcióval könnyen igazolható –, hogy adott n esetén minden m természetes szám egyértelműen írható

$$(3) \quad m = \binom{a_n}{n} + \binom{a_{n-1}}{n-1} + \dots + \binom{a_i}{i}$$

alakba, ahol $a_n > a_{n-1} > \dots > a_i \geq i \geq 1$.

Ekkor az

$$\begin{aligned} a_n &= x_1 + x_2 + \dots + x_n + n, \\ a_{n-1} &= x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + n - 1, \\ &\vdots \\ a_2 &= x_1 + x_2 + 2, \\ a_1 &= x_1 + 1 \end{aligned}$$

választással m értékéből az $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ számok rendre meghatározhatók, és innen az $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékek is.