

Az általánosság megszorítása nélkül föltehető, hogy a szétdarabolandó ABC háromszög rövidebbik befogója, $AC = 1$. Ekkor a másik befogó, $BC = \sqrt{3}$, a háromszög területe pedig $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ezért a vele egyenlő területű négyzet oldala $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Mivel az átdarabolás során a részek területe nem változik, ezért a háromszögből egy $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ oldalú négyzetet kell készítenünk.

1988-03-120-1.eps

1. ábra

Első lépésben téglalapot készítünk a háromszögből. Vágjuk el az A_1C_1 középvonala mentén és forgassuk el a levágott A_1C_1B háromszöget a C_1 körül 180° -kal (1. ábra). Így kapjuk az $A_1A'_1AC$ téglalapot, melynek oldalai $A_1A'_1 = AC = 1$ és $A'_1A = CA_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1988-03-120-2.eps

2. ábra

Legyen a CA oldal C -től $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ távolságra lévő pontja P (ilyen pont van, mert $0 < \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} < 1$, az $A_1A'_1$ oldal A'_1 -től ugyanekkora távolságra lévő pontja pedig Q). Vágjuk el az $A_1A'_1AC$ téglalapot az A_1P egyenes mentén, a levágott A_1PC háromszöget pedig toljuk el az A_1P egyenessel párhuzamosan úgy, hogy az A_1C oldal $A_1^*C^*$ képének egyenese menjen át a Q ponton (2. ábra). Ha a P pont képét P^* -gal jelöljük, akkor $A_1Q = PA$ miatt az A'_1 , A , P^* pontok is egy egyenesre esnek, ezért az $A_1QA_1^*$ háromszög egybevágó a PAP^* háromszöggel. Ha most az $A_1A'_1APP^*C^*A_1^*$ idomból levágjuk az $A_1QA_1^*$ háromszöget, és áthelyezzük azt a PAP^* háromszög helyére, akkor a $QA'_1P^*C^*$ derékszögű négyszöget kapjuk. Ez utóbbi viszont négyzet, mert területe az egyik oldalának a négyzetével egyenlő:

$$A'_1Q^2 = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az eljárás során az eredeti háromszöget valóban négy részre vágtuk, mert a három vágás egyike sem metszi át a korábbiakat. A négy rész látható a 3. ábrán. Ezzel a feladatot megoldottuk.

1988-03-120-3.eps

3. ábra

Megjegyzések. 1. A megoldásban leírt módszerrel tetszőleges a és b oldalú téglalaphból $\sqrt{ab}$ oldalú négyzetet tudunk készíteni. Mivel pedig tetszőleges háromszög könnyen átdarabolható téglalappá, ezért lényegében bebizonyítottuk azt a tételt, hogy *egyenlő területű háromszögek véges sok lépésben átdarabolhatók egymásba*. Ez speciális esete *Bolyai Farkas* tételének, mely szerint egyenlő területű sokszögek véges sok lépésben átdarabolhatók egymásba.

1988-03-121-1.eps

4. ábra

2. A 4. ábra azt mutatja be, hogy a feladat *csuklós átdarabolással* is megoldható, avval az elvvel, amellyel H. Steinhaus, Matematikai Kaleidoszkóp c. munkájában (magyarul: Gondolat, Budapest, 1984, 9–10. oldal) a szabályos háromszögre oldja meg az itt vizsgált feladatot. Bármelyik 3 pontba teszünk egy-egy csuklót az F_1, F_2, F_3, F_4 pontok közül, ezek együtt tartják a 4 darabot, és a részek 180° -os elforgatásaival az ABC háromszög átrendezhető a $PQRS$ négyzetbe.