

I. megoldás. $2^{62} + 1 = (2^{31} + 1)^2 - 2 \cdot 2^{31} = (2^{31} + 1)^2 - 2^{32}$.

A jobb oldal két négyzet különbségként szorzattá alakítható és így

$$(2^{31} + 1)^2 - (2^{16})^2 = (2^{31} + 2^{16} + 1)(2^{31} - 2^{16} + 1)$$

adódik. A feladat kérdésére tehát igenlő a válasz, $2^{62} + 1$ osztható $(2^{31} + 2^{16} + 1)$ -gyel, a hányados $2^{31} - 2^{16} + 1$.

II. megoldás. Jelöljük 2^{15} értékét a -val. Ekkor $2^{62} = 4a^4$, $2^{31} = 2a^2$, végül $2^{16} = 2a$. Így azt kell eldöntenünk, hogy $4a^4 + 1$ osztható-e $(2a^2 + 2a + 1)$ -gyel. Végezzük el az osztást a két polinom között:

$$\begin{array}{r} (4a^4 + 1) : (2a^2 + 2a + 1) = 2a^2 - 2a + 1 \\ \underline{4a^4 + 4a^3 + 2a^2} \\ -4a^3 - 2a^2 + 1 \\ \underline{-4a^3 - 4a^2 - 2a} \\ 2a^2 + 2a + 1 \\ \underline{2a^2 + 2a + 1} \\ 0 \end{array}$$

Eredményünk a $4a^4 + 1 = (2a^2 + 2a + 1)(2a^2 - 2a + 1)$ szorzatalak. Innen látható, hogy ha a egész szám $- 2^{15}$ -, akkor $2a^2 - 2a + 1$ is az, és így $4a^4 + 1$ minden a egészre osztható $(2a^2 + 2a + 1)$ -gyel.

Megjegyzés. A második megoldásban megadtunk egy $p(x)$ és egy $q(x)$ egész együtthatós polinomot, melyekre fennállt, hogy

$$p(2^{15}) = 2^{62} + 1 \quad \text{és} \quad q(2^{15}) = 2^{31} + 2^{16} + 1.$$

Ezután a $p(x)$ polinomot $q(x) \cdot h(x)$ alakban állítottuk elő, ahol a $h(x)$ is egész együtthatós. Ebből következik, hogy $h(2^{15})$ egész és így $p(2^{15}) = q(2^{15}) \cdot h(2^{15})$ miatt valóban $q(2^{15}) | p(2^{15})$.

Ez a módszer nem feltétlenül vezet eredményre; ha $p(x)$ és $q(x)$ egész együtthatós polinomok, a adott egész szám és $p(a)$ osztható $q(a)$ -val, akkor nem biztos, hogy a $p(x)$ polinom felírható $q(x) \cdot h(x)$ alakban.

Például ha $p(x) = x^4 + 3$, $q(x) = x + 1$, akkor $p(3) = 84$ osztható $q(3) = 4$ -gyel, de $p(x)$ nem osztható $q(x)$ -szel. Annyi igaz, hogy ha a $p(x)$ és $q(x)$ egész együtthatós polinomok olyanok, hogy $p(n)$ végtelen sok n egészre osztható $q(n)$ -nel, akkor $p(x)$ felírható $q(x) \cdot h(x)$ alakban, ahol $h(x)$ olyan racionális együtthatós polinom, amelyik minden egész helyen egész értéket vesz fel.