

Az elsőnek befestett háromszög oldalegyenesei a síknak a háromszögön kívüli részét 6 részre osztják. Megmutatjuk, hogy a harmadik lépéstől kezdve e 6 rész mindegyikében 2-vel több háromszöget festünk be, mint a megelőző lépéskor. A harmadik lépéstől kezdve így összesen 12-vel nő a lépésenként kifestett háromszögek száma.

1988-02-074-3.eps

Ha $n \geq 2$, akkor az ábrán A -val, C -vel, illetve E -vel jelölt síkrészekben az n -edik lépés után pirossá vált háromszögek együttesen egy-egy olyan szabályos háromszöget alkotnak, melynek oldala a sík lefedéséhez használt kis háromszögek oldalának $(n - 1)$ -szerese, hiszen a kifestett idom lépésenként egy „réteggel” bővül. Ekkor mindhárom befestett rész $(n - 1)^2$ darab kis háromszöget tartalmaz. Ezután úgy kapjuk az egyes részekben pontosan az n -edik lépés során kifestett háromszögek számát, ha az n -edik lépés után piros háromszögek számából levonjuk azoknak a háromszögeknek a számát, amelyek már az $(n - 1)$ -edik lépés után is pirosak voltak.

$$(1) \quad (n - 1)^2 - [(n - 1) - 1]^2 = [(n - 1) + (n - 2)][(n - 1) - (n - 2)] = 2n - 3.$$

Ez a mennyiség valóban 2-vel nő, ha az n -et 1-gyel növeljük, így a harmadik lépéstől kezdve az A , C és E síkrészek mindegyikében valóban 2-vel nő a lépésenként kifestett háromszögek száma.

Ugyanez igaz már a második lépéstől kezdve a B , D és F síkrészekben, mert ha ezen síkrészek mindegyikéhez hozzávesszük az elsőnek kifestett háromszöget, az A , C E síkrészekkel egybevágó síkrészekhez jutunk, tehát az előzőekben elmondott bizonyítás végkövetkeztetése most is érvényes.

Ezek szerint az egyes lépésekben kifestett háromszögek száma – a második lépéstől kezdve – egy olyan számtani sorozatot alkot, amelynek mind az első tagja, mind pedig a differenciája 12. A századik lépésben kiszínezett háromszögek száma e sorozat 99. tagja, vagyis $12 + 98 \cdot 12 = 1188$.