

I. megoldás. Legyen az ötszög AD átlójának felezőpontja F . Ekkor F , M , N és P az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjaiként egy paralelogramma négy csúcsa.

1987-12-456-1.eps

A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az FN szakasz felezőpontja egybeesik az MP szakasz megadott R felezőpontjával. Az RS szakasz így a QFN háromszögnek a QF oldallal párhuzamos középvonala. A QF pedig éppen EA -val párhuzamos középvonal az EAD háromszögben. Így $EA = 2QF = 2(2 \cdot RS) = 4RS$, és abból, hogy mindkettő párhuzamos a QF szakasszal, következik, hogy EA és RS egymással is párhuzamosak.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

II. megoldás. Vegyünk fel egy tetszőleges O pontot és indítsunk abból helyvektorokat a megadott pontokhoz, mindegyiküket a megfelelő kisbetűvel jelölve. A vektorok tulajdonságai miatt azt kell megmutatnunk, hogy

$$4 \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AE}.$$

Ismeretes, hogy egy szakasz felezőpontjának helyvektora a szakasz végpontjaiba mutató helyvektorok számtani közepe. Ezt felhasználva :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}), & \mathbf{p} &= \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}), & \mathbf{r} &= \frac{1}{2}(\mathbf{m} + \mathbf{p}) = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}), \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), & \mathbf{q} &= \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{e}), & \mathbf{s} &= \frac{1}{2}(\mathbf{n} + \mathbf{q}) = \frac{1}{4}(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e}). \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } \overrightarrow{RS} = \mathbf{s} - \mathbf{r} = \frac{1}{4}(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e}) - \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) = \frac{1}{4}(\mathbf{e} - \mathbf{a}). \text{ Másrészt } \overrightarrow{AE} = \mathbf{e} - \mathbf{a}, \text{ vagyis } \overrightarrow{AE} = 4 \overrightarrow{RS}.$$

Az AE és az RS szakaszok tehát valóban párhuzamosak, és az AE szakasz négyszer olyan hosszú, mint az RS szakasz.

Megjegyzés. A megoldásokban nem használtuk ki sem az ötszög konvexitását, sem azt, hogy az A , B , C , D , E pontok egy síkban vannak. A feladat állítása tehát akkor is igaz, ha az A , B , C , D , E pontokat tetszőlegesen vesszük fel a térben.