

Az ABC háromszög beírt körének a középpontja legyen O , a hozzáírt körök középpontjai közül a két adott pedig O_A és O_B .

Az O_A és O_B pontok rajta vannak a háromszög C csúcsán átmenő külső, O pedig a C -n átmenő belső szögfelezőn. Ez a két egyenes merőleges egymásra, ezért a C csúcs az O pont merőleges vetülete az O_AO_B szakaszon. Ugyanígy kapjuk az A csúcsot O_B -nek az OO_A , a B csúcsot pedig O_A -nak az O_BO -n lévő merőleges vetületeként. Jelölje még O^* az OO_AO_B , háromszög magasságpontját.

A fentiek alapján szerkesztett A , B , C pontok egy valódi háromszög csúcsai, amennyiben O , O_A és O_B nincsenek egy egyenesen és $O_AOO_B \neq 90^\circ$. E három pont egy ortocentrikus pontnégyes, O , O_A , O_B és O^* három magasságtalppontja. A szerkesztés során attól függően jutunk az 1/a vagy pedig az 1/b ábrához, hogy az O_AOO_B nagyobb-e, vagy pedig kisebb, mint 90° .

1987-12-455-1.eps

1.a ábra

1987-12-455-2.eps

1.b ábra

Ismeretes, hogy hegyesszögű háromszög magasságai belső, oldalai pedig külső szögfelezők a talpponti háromszögben. Ennek megfelelően az $O_AOO_B < 90^\circ$ esetben szerkesztett ABC háromszög nem megoldása feladatunknak, ekkor O a C -vel szemközti oldalt kívülről érintő hozzáírt kör középpontja lesz.

A feladatnak tehát akkor és csak akkor létezik megoldása, ha $90^\circ < O_AOO_B < 180^\circ$, és ilyenkor pontosan egy megoldás van.